

ĐỀ THI HỌC KÌ I:

ĐỀ SỐ 11

MÔN: TOÁN - LỚP 9



BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Đề bài

Câu 1 (2,5 điểm): Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x + 9}{x - 9}$ với $x > 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

3) So sánh $\frac{A}{B}$ và 4.

Câu 2 (2,5 điểm): Cho hàm số $y = (m + 1)x + m$ (với $m \neq -1$ có đồ thị là đường thẳng (d))

1) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng (d) với giá trị m tìm được ở câu 1

3) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 3x + 2$ tại một điểm nằm trên trục hoành

Câu 3 (1,0 điểm):

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Câu 4 (3,5 điểm): Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm H cố định nằm ngoài đường tròn. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với đoạn thẳng OH . Từ một điểm S bất kì trên đường thẳng d kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng SO với đoạn thẳng AB và với đường tròn $(O; R)$.

1) Chứng minh bốn điểm S, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn

2) Chứng minh $OM \cdot OS = R^2$

3) Chứng minh N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SAB

4) Khi điểm S di chuyển trên đường thẳng d thì điểm M di chuyển trên đường nào? Tại sao?

Câu 5 (0,5 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng
$$P = \frac{5y^3 - x^3}{yx + 3y^2} + \frac{5z^3 - y^3}{zy + 3z^2} + \frac{5x^3 - z^3}{xz + 3x^2} \leq 1$$

LG bài 1

Giải chi tiết:

Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x + 9}{x - 9}$ với $x > 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3$

Khi $x = 3$ thì
$$A = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 9}{\sqrt{3} - 3} = \frac{(-5 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 3)}{\sqrt{3} - 3} = -5 - \sqrt{3}$$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x + 9}{x - 9} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3)^2 + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) - (x + 9)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x + 6\sqrt{x} + 9 + x - 3\sqrt{x} - x - 9}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \end{aligned}$$

3) So sánh $\frac{A}{B}$ và 4.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} - 2 + \frac{9}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm \sqrt{x} và $\frac{9}{\sqrt{x}}$ ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{9}{\sqrt{x}}} = 2 \cdot 3 = 6$.

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \left(\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \right) - 2 \geq 6 - 2 = 4.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 9$ (tm).

Vậy $\frac{A}{B} \geq 4$.

LG bài 2

Giải chi tiết:

Cho hàm số $y = (m+1)x + m$ (với $m \neq -1$ có đồ thị là đường thẳng (d))

1) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1

Để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1 \Rightarrow Điểm $A(0;1)$ thuộc (d)

$$\Rightarrow 1 = (m+1)0 + m \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1.

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng (d) với giá trị m tìm được ở câu 1

Với $m = 1$ thì $(d): y = 2x + 1$

Ta có:

Cho hàm số $y = (m+1)x + m$ (với $m \neq -1$ có đồ thị là đường thẳng (d))

1) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1

Để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1 \Rightarrow Điểm $A(0;1)$ thuộc (d)

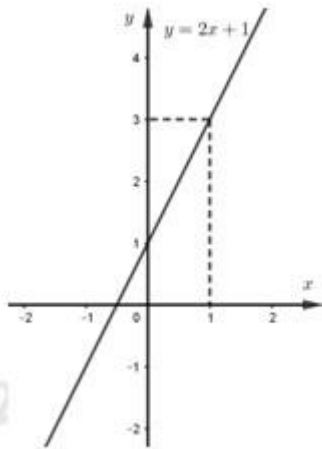
$$\Rightarrow 1 = (m+1)0 + m \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1.

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng (d) với giá trị m tìm được ở câu 1

Với $m=1$ thì $(d): y = 2x + 1$

Ta có:



Đồ thị hàm số $(d): y = 2x + 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(1;3)$

3) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 3x + 2$ tại một điểm nằm trên trục hoành

Gọi đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 3x + 2$ tại một điểm B nằm trên trục hoành

$$\Rightarrow B \text{ là giao điểm của đường thẳng } y = 3x + 2 \text{ với trục hoành} \Rightarrow B\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$$

$$\text{Vì } B \text{ cũng thuộc } (d) \Rightarrow 0 = (m+1)\left(-\frac{2}{3}\right) + m \Leftrightarrow \frac{1}{3}m - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

LG bài 3

Giải chi tiết:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ (\sqrt{2} + 1)x - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ (\sqrt{2} + 1)[1 - (\sqrt{2} - 1)y] - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)y - y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ -y - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (\sqrt{2} - 1)y \\ y = 0 \end{cases}$$

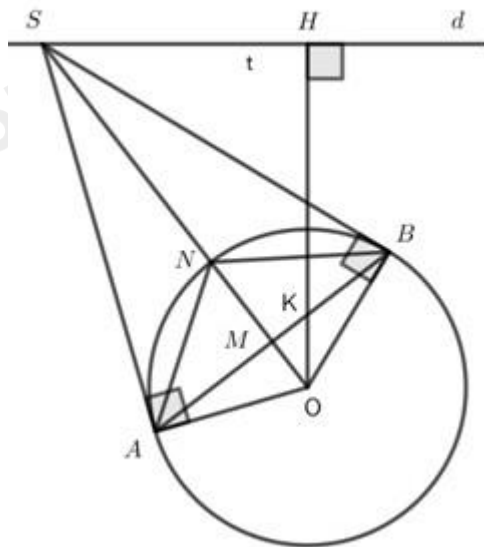
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 0)$

LG bài 4

Giải chi tiết:

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm H cố định nằm ngoài đường tròn. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với đoạn thẳng OH . Từ một điểm S bất kì trên đường thẳng d kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng SO với đoạn thẳng AB và với đường tròn $(O; R)$.



1) Chứng minh bốn điểm S, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn

Ta có SA, SB là hai tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \angle OAS = \angle OBS = 90^\circ$

$\Rightarrow A, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính OS

$\Rightarrow A, B, O, S$ cùng thuộc một đường tròn đường kính OS.

2) Chứng minh $OM \cdot OS = R^2$

Ta có SA, SB là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại S

$\Rightarrow SA = SB$ và SO là phân giác $\angle ASB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle SAB$ là tam giác cân tại S.

$\Rightarrow SO$ vừa là phân giác $\angle ASB$ vừa là đường trung trực của AB (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow SO \perp AB$ tại M.

$\Rightarrow AM$ là đường cao trong tam giác OAS

Xét tam giác OAS vuông tại A, đường cao AM ta có:

$$OM \cdot OS = OA^2 = R^2 \text{ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)}$$

3) Chứng minh N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SAB

Có $\angle OBS = 90^\circ$ (SB là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow \angle OBN + \angle NBS = 90^\circ$ (1)

Có $SO \perp AB$ (chứng minh trên) \Rightarrow Tam giác MNB vuông tại M $\Rightarrow \angle MNB + \angle NBM = 90^\circ$ (2)

Có $ON = OB = R \Rightarrow$ Tam giác ONB cân tại O $\Rightarrow \angle MNB = \angle OBN$ (tính chất tam giác cân) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle NBS = \angle NBM \Rightarrow BN$ là phân giác $\angle SBA$

Mặt khác SN là phân giác $\angle ASB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $SN \cap BN = \{N\}$

$\Rightarrow N$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SAB .

4) Khi điểm S di chuyển trên đường thẳng d thì điểm M di chuyển trên đường nào? Tại sao?

Gọi $HO \cap AB = \{K\}$.

Xét $\triangle OMK$ và $\triangle OHS$ có: $\angle O$ chung; $\angle OMK = \angle OHS (= 90^\circ)$

$$\Rightarrow \triangle OMK \sim \triangle OHS \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OK}{OS} = \frac{OM}{OH} \Rightarrow OK \cdot OH = OM \cdot OS = R^2$$

Vì H cố định $\Rightarrow OH$ cố định mà R cố định $\Rightarrow OK$ cố định.

Mặt khác $\angle OMK = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OK cố định.

Vậy khi điểm S di chuyển trên đường thẳng d thì điểm M di chuyển trên đường tròn đường kính OK cố định.

LG bài 5

Giải chi tiết:

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng
$$P = \frac{5y^3 - x^3}{yx + 3y^2} + \frac{5z^3 - y^3}{zy + 3z^2} + \frac{5x^3 - z^3}{xz + 3x^2} \leq 1$$

Với $x, y, z > 0$ ta có:
$$\frac{5y^3 - x^3}{yx + 3y^2} \leq 2y - x \Leftrightarrow 5y^3 - x^3 \leq -x^2y + 6y^3 - xy^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - xy(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng với mọi } x, y > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{5y^3 - x^3}{yx + 3y^2} \leq 2y - x \text{ đúng với } x, y, z > 0$$

Tương tự ta được
$$\frac{5z^3 - y^3}{zy + 3z^2} \leq 2z - y; \frac{5x^3 - z^3}{xz + 3x^2} \leq 2x - z$$

$$\Rightarrow P = \frac{5y^3 - x^3}{yx + 3y^2} + \frac{5z^3 - y^3}{zy + 3z^2} + \frac{5x^3 - z^3}{xz + 3x^2} \leq 2y - x + 2z - y + 2x - z = x + y + z = 1$$

Dấu '=' xảy ra khi
$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$