

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) + \cos(2\pi + \pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha) \\ &= \cos(-\alpha) - \cos(-\alpha) + \cot(-\alpha). \\ &= \cos\alpha - \cos\alpha - \cot\alpha \\ &= -\cot\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Do } \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Mà } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \text{ nên } \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } P = -\cot\alpha = \sqrt{3}.$$

Đáp án C

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Phương pháp

Sử dụng công thức cộng.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Đáp án B

Câu 4: Công thức $\sin 2a$ bằng

A. $2\sin a \cdot \cos a$

B. $\sin a$

C. $\cos a$

D. $\cos 2a$

Phương pháp

Áp dụng công thức nhân đôi

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a.$$

Đáp án A

Câu 5: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ là

A. $k2\pi$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. 2π

Phương pháp

Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác cơ bản:

- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Lời giải

Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Đáp án D

Câu 6: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = -2 \cos x$

B. $y = -2 \sin^2 x + 2$

C. $y = -2 \sin x$

D. $y = -2 \cos x + 2$

Phương pháp

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

- Nếu D không phải tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

- Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

- Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

- Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = f(x) = -2 \sin x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có $f(-x) = -2 \sin(-x) = \sin x = -f(x)$.

Vậy $y = -2 \sin x$ là hàm số lẻ.

Đáp án C

Câu 7: Tập nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $S = \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Phương pháp

- Trường hợp $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp $|m| \leq 1$, khi đó: Tồn tại duy nhất một số thực $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Ta có: $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Ta có $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đáp án D

Câu 8: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\frac{\pi}{9}$.

B. $-\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $-\frac{\pi}{9}$.

Phương pháp

Áp dụng các công thức giải phương trình lượng giác cơ bản rồi kết hợp điều kiện đã cho để chọn nghiệm thỏa mãn.

Lời giải

Ta có $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{17\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

TH1. Với $x = \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{13}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{13}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{36} \end{cases}$

TH2. Với $x = \frac{17\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{17}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{17}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{7\pi}{36} \end{cases}$

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{7\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \frac{13\pi}{36}$. Khi đó tổng

hai nghiệm bằng $\frac{13\pi}{36} - \frac{7\pi}{36} = \frac{\pi}{6}$.

Đáp án C

Câu 9: Cho dãy số $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ (số hạng sau bằng một phần ba số hạng liền trước nó). Công thức tổng quát của dãy số đã cho là

A. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

B. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

C. $u_n = \frac{1}{3n}$

D. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$

Phương pháp

Tìm tính chất chung của các số trong dãy số rồi dự đoán công thức tổng quát.

Lời giải

Từ các số hạng đầu tiên của dãy số ta dự đoán $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Đáp án C

Câu 10: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2n - 1$ với $n \geq 1$. Số hạng u_1 bằng

A. 1.

B. 2

C. 3.

D. 4

Phương pháp

Thay $n = 1$ vào công thức tổng quát của dãy số.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 2.1 - 1 = 1$

Đáp án A

Câu 11: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

Phương pháp

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Lời giải

Xét phương án A: $u_2 = 7, u_3 = 15$ vì $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ do đó (u_n) không phải là cấp số cộng.

Xét phương án B: theo giả thiết ta có $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó (u_n) là cấp số cộng.

Xét phương án C: $u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = -2; u_5 = -9$ do đó (u_n) không phải là cấp số cộng.

Xét phương án D: $u_2 = 2, u_3 = 4$ vì $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ do đó (u_n) không phải là cấp số cộng.

Đáp án B

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_6 = 48$ và $u_{11} = 83$. Tìm cặp $(u_1; d)$.

A. $(7; 13)$

B. $(-7; -13)$

C. $(13; 7)$

D. $(-13; -7)$

Phương pháp

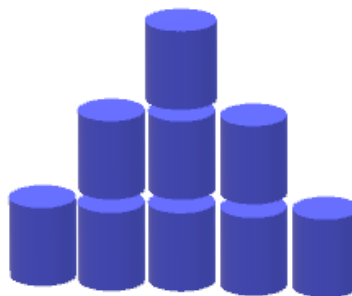
Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công sai d và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được d và u_1 .

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_6 = 48 \\ u_{11} = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 48 \\ u_1 + 10d = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 \\ d = 7 \end{cases}$

Đáp án C

Câu 13: Trong hội chợ, một công ty sơn muốn xếp 1089 hộp sơn theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới. Hàng cuối cùng có bao nhiêu hộp sơn?



A. 63

B. 65

C. 67

D. 69

Phương pháp

Cho một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d .

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ hoặc $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Lời giải

Giả sử 1089 được xếp thành n hàng.

Từ giả thiết ta có số hộp sơn trên mỗi hàng là số hạng của một cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 2$.

$$\text{Do đó: } S_n = 1089 \Leftrightarrow n + n(n-1) = 1089 \Leftrightarrow n = 33.$$

Vậy số hộp sơn ở hàng cuối cùng là: $u_{33} = 1 + 32 \cdot 2 = 65$.

Đáp án B

Câu 14: Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. 1, -2, 4, 8, -16

B. 2, 22, 222, 22222.

C. 3, 6, 12, 24.

D. $x, 2x, 3x, 4x$ với $x \neq 0$.

Phương pháp

Chứng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n \cdot q$ trong đó q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

* T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.

* T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Lời giải

Ta thấy ở đáp án C có $6 = 3 \cdot 2$, $12 = 6 \cdot 2$, $24 = 12 \cdot 2$ nên đây là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Đáp án C

Câu 15: Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Tìm n ?

A. $n = 8$

B. $n = 9$

C. $n = 6$

D. $n = 7$

Phương pháp

Cho một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q .

$$\text{Đặt } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

$$\text{Khi đó: } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1.$$

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức của cấp số nhân ta có: } S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{3 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 765 \Leftrightarrow n = 8.$$

Đáp án A

Câu 16: Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, số hạng thứ tư là 32 và số hạng cuối là 2048?

A. $\frac{1365}{2}$

B. $\frac{5416}{2}$

C. $\frac{5461}{2}$

D. $\frac{21845}{2}$

Phương pháp

Cho một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q .

$$\text{Đặt } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

$$\text{Khi đó: } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1.$$

Lời giải

Theo bài ra ta có $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_4 = 32$ và $u_n = 2048$.

$$u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow 32 = \frac{1}{2} \cdot q^3 \Rightarrow q = 4$$

$$u_n = 2048 \Rightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 2048 \Rightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Rightarrow n = 7$$

Khi đó tổng của cấp số nhân này là $S_7 = \frac{u_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-4^7)}{1-4} = \frac{5461}{2}$.

Đáp án C

Câu 17: Điều tra về chiều cao của học sinh khối lớp 11, ta có kết quả sau:

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		$N = 100$

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là

- A. 156,5
- B. 157
- C. 157,5
- D. 158

Phương pháp

Đọc bảng số liệu.

Lời giải

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là $\frac{156 + 158}{2} = 157$.

Đáp án B

Câu 18: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là

- A. [40;60)
- B. [20;40)
- C. [60;80)
- D. [80;100)

Phương pháp

Nhóm chứa một là nhóm có tần số lớn nhất.

Lời giải

Một M_0 chứa trong nhóm [40;60)

Đáp án A

Câu 19: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến nơi làm việc của các nhân viên một công ty như sau:

Thời gian	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)
Số nhân viên	7	14	25	37	21	14	10

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $Q_1 = \frac{1360}{37}, Q_3 = \frac{800}{21}$
- B. $Q_1 = \frac{1360}{37}, Q_3 = \frac{3280}{83}$
- C. $Q_1 = \frac{136}{5}, Q_3 = \frac{3280}{83}$
- D. $Q_1 = \frac{136}{5}, Q_3 = \frac{800}{21}$

Phương pháp

Để tính tứ phân vị thứ nhất Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_3 , giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p , với $p=1$ ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

Lời giải

Cỡ mẫu là $n = 128$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_{32} + x_{33}}{2}$. Do x_{32}, x_{33} đều thuộc nhóm $[25; 30)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

Do đó, $p = 3; a_3 = 25; m_3 = 25; m_1 + m_2 = 21, a_4 - a_3 = 5$ và ta có

$$Q_1 = 25 + \frac{\frac{128}{4} - 21}{25} \cdot 5 = \frac{136}{5}$$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{96} + x_{97}}{2}$. Do x_{96}, x_{97} đều thuộc nhóm $[35; 40)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

Do đó, $p = 5; a_5 = 35; m_5 = 21; m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 7 + 14 + 25 + 37 = 83; a_6 - a_5 = 5$ và ta có

$$Q_3 = 35 + \frac{\frac{3 \cdot 128}{4} - 83}{21} \cdot 5 = \frac{800}{21}.$$

Đáp án D

Câu 20: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu trên là

- A. [40; 60)
- B. [20; 40)
- C. [60; 80)
- D. [80; 100)

Phương pháp

Nhóm chứa trung vị là nhóm chứa 2 phần tử ở giữa của dãy số liệu.

Lời giải

Ta có: $n = 42$

Nên trung vị của mẫu số liệu trên là $Q_2 = \frac{x_{21} + x_{22}}{2}$

Mà $x_{21}, x_{22} \in [40; 60)$

Vậy nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu trên là nhóm $[40; 60)$

Đáp án A

Phần tự luận.

Bài 1.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất : $y = \tan^2 x - \tan x + 1$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Phương pháp

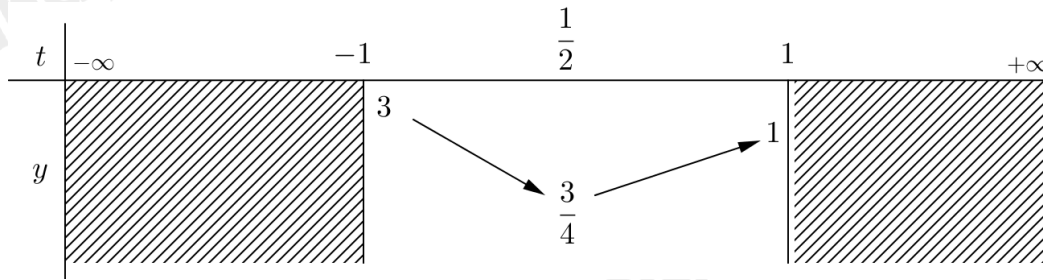
B1: Đặt ẩn phụ và tìm điều kiện của ẩn

B2: Lập bảng biến thiên, khảo sát hàm số rồi kết luận

Lời giải

Đặt $\tan x = t, t \in [-1; 1]$, hàm số có dạng: $y = t^2 - t + 1$.

Xét hàm số $y = t^2 - t + 1$ trên $[-1; 1]$ có BBT như sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{3}{4}$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2}$ tức $\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 khi và chỉ khi $t = -1$ tức là $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2.

a) Giải phương trình $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b) Giải phương trình $\cos 3x - \sin 2x = 0$

c) Giải phương trình $\sin 4x + 1 - 2 \cos 2x = \sin 2x$.

Phương pháp

a) Ta có: $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Áp dụng các công thức lượng giác đặc biệt để đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

c) Sử dụng công thức nhân đôi để làm xuất hiện nhân tử chung: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Lời giải

a) Ta có: $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $\cos 3x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

c) Ta có: $\sin 4x + 1 - 2 \cos 2x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos 2x + 1 - 2 \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(2 \cos 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 3.

a) Cho cấp số cộng $\{u_n\}$ có $u_4 = -12$; $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng bao nhiêu ?

b) Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Phương pháp

a) Cho một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d .

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó : $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ hoặc $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

b) Cho một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q .

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó : $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$.

Lời giải

a) Ta có : $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}$.

Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là: $S_{16} = 16 \cdot (-21) + \frac{16 \cdot 15}{2} \cdot 3 = 24$.

b) Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$. Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1 - p^9)}{1 - p} = 10220000$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

Bài 4.

Một cửa hàng đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: x_1, x_2, \dots, x_{35} trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i . Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)
Số khách hàng	3	15	10	7

Số tiền khách hàng mua xăng

a) Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

b) Tìm tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Phương pháp

a) Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$.

Bước 2. Trung vị là $M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$,

trong đó n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p . Với $p = 1$, ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

b) Để tính tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_1 , giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p , với $p=1$ ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

Để tính tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_3 . Giả sử đó là nhóm thứ $p : [a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p , với $p=1$ ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

Tứ phân vị thứ hai Q_2 chính là trung vị M_e .

Nhận xét. Ta cũng có thể xác định nhóm chứa tứ phân vị thứ r nhờ tính chất: có khoảng $\left(\frac{r \cdot n}{4}\right)$ giá trị nhỏ hơn tứ phân vị này.

Lời giải

a) Trung vị là x_{18} thuộc nhóm $[30;60)$, do đó $p=2; a_2=30; m_2=15; m_1=3, a_3-a_2=30$

$$\text{và ta có: } M_e = 30 + \frac{\frac{35}{2} - 3}{15} \times 30 = 59$$

b) Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là x_9 thuộc nhóm $[30;60)$, do đó $p=2; a_2=30; m_2=15; m_1=3; a_3-a_2=30$ và ta

$$\text{có: } Q_1 = 30 + \frac{\frac{35}{4} - 3}{15} \times 30 = 41.5$$

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là x_{27} thuộc nhóm $[60;90)$,

do đó $p=3; a_3=60; m_3=10; m_1+m_2=3+15=18; a_4-a_3=30$ và ta có:

$$Q_3 = 30 + \frac{\frac{3 \times 35}{4} - 18}{10} \times 30 = 54.75$$