

## ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ I – Đề số 8

Môn: Toán - Lớp 9

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

**Bài 1 (2 điểm)** Thực hiện phép tính

a)  $A = 3\sqrt{125} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

b)  $B = (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{20} + 5}{\sqrt{5} + 2}$

c)  $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ - \tan 35^\circ + \cot 55^\circ - \frac{\cot 32^\circ}{\tan 58^\circ}$

**Phương pháp**

a) Đưa về trị tuyệt đối để tính toán.

b) Đưa nhân tử chung ra ngoài, rút gọn mẫu số và đưa về trị tuyệt đối để tính toán.

c) Biến đổi các tỉ số lượng giác về cùng số đo góc để tính toán.

**Lời giải**

a)  $A = 3\sqrt{125} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 15\sqrt{5} + |2-\sqrt{5}| = 15\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 2(8\sqrt{5} - 1)$

b)

$$\begin{aligned}
 B &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{20} + 5}{\sqrt{5} + 2} \\
 &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} - \frac{2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5} + 2)} \\
 &= (2 + \sqrt{7})|2 - \sqrt{7}| - \frac{\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})}{(\sqrt{5} + 2)} \\
 &= (2 + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 2) - \sqrt{5} \\
 &= 7 - 4 - \sqrt{5} = 3 - \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

c)  $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ - \tan 35^\circ + \cot 55^\circ - \frac{\cot 32^\circ}{\tan 58^\circ}$

$$C = \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ - \tan 35^\circ + \tan 35^\circ - \frac{\cot 32^\circ}{\cot 32^\circ} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

**Bài 2 (1,5 điểm)** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{9x-27} - \sqrt{x-3} = 6$

b)  $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x+1} = 0$

**Phương pháp**

Xác định điều kiện xác định của phương trình.

a) Đưa các hệ số ra ngoài căn, nhóm nhân tử chung để tìm x.

b) Sử dụng hằng đẳng thức, nhóm nhân tử chung để tìm x.

**Lời giải**

a)  $\sqrt{9x-27} - \sqrt{x-3} = 6$  (ĐKXĐ:  $x \geq 3$ )

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3$$

$$\Leftrightarrow x-3=9$$

$$\Leftrightarrow x=12 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy  $x \in \{12\}$ .

b)  $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x+1} = 0$  (ĐKXĐ:  $x \geq -1$ )

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1}-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TM)} \\ x = 0 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{-1; 0\}$ .

**Bài 3 (2,5 điểm)** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x+1}}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 9$ .

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x để  $B \leq -\frac{1}{2}$ .

4) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = \frac{6A}{B}$ .

**Phương pháp**

1) Kiểm tra  $x = 9$  có thỏa mãn điều kiện hay không, sau đó thay vào biểu thức A để tính.

2) Xác định mẫu thức chung, quy đồng và thực hiện các phép toán với các phân thức đại số.

3) Thay biểu thức B vào  $B \leq -\frac{1}{2}$ .

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, g(x) < 0 \text{ hoặc } f(x) \leq 0, g(x) > 0$$

4) Tính  $M = \frac{6A}{B}$ . Chia cả tử và mẫu cho  $\sqrt{x}$  rồi sử dụng bất đẳng thức Cosi:  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

**Lời giải**

1) Khi  $x = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$  thỏa mãn điều kiện.

Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{3-2}{9+3+1} = \frac{1}{13}$$

Vậy khi  $x = 9$  thì  $A = \frac{1}{13}$ .

2) Với  $x > 0; x \neq 4$  ta có:  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{2x - (5\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{2x - 5\sqrt{x} + 2 - x + \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 4$

3) Với  $x > 0; x \neq 4$  để  $B \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}} \leq 0$  mà  $2\sqrt{x} > 0$  nên  $3\sqrt{x}-4 \leq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{16}{9}$

Kết hợp với điều kiện ta được  $0 < x \leq \frac{16}{9}$  thì  $B \leq -\frac{1}{2}$

4) Ta có:  $M = \frac{6A}{B} = \frac{6(\sqrt{x}-2)}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{6(\sqrt{x}-2)}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{6\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$   
 $\Rightarrow M = \frac{6}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1}$  do  $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với 2 số dương ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq 2 \text{ hay } M \leq 2$$

Dấu "=" xảy ra  $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$  (thỏa mãn đk)

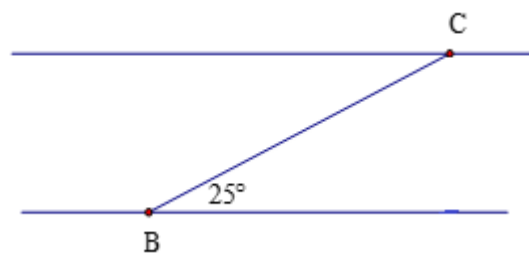
Vậy  $\text{Max } M = 2 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Bài 4 (3,5 điểm)**

1) Một con thuyền đi qua một khúc sông theo hướng từ B đến C (như hình vẽ) với vận tốc  $3,5 \text{ km/h}$  trong 12 phút. Biết rằng đường đi của thuyền tạo với bờ sông một góc  $25^\circ$ . Hãy tính chiều rộng của khúc sông? (Kết quả tính theo đơn vị  $\text{km}$ , làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

2) Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AH. Gọi E là hình chiếu của H trên AB.

a. Biết  $AE = 3,6 \text{ cm}; BE = 6,4 \text{ cm}$ . Tính AH, EH và góc B. (Số đo góc làm tròn đến độ)



b. Kẻ  $HF$  vuông góc với  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh  $AB.AE = AC.AF$ .

c. Đường thẳng qua  $A$  và vuông góc với  $EF$  cắt  $BC$  tại  $D$ ;  $EF$  cắt  $AH$  tại  $O$ . Chứng minh rằng

$$S_{ADC} = \frac{S_{AOE}}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}$$

**Phương pháp**

1. Kẻ  $CH$  vuông góc với bờ sông tại  $H$ , ta có  $CH \perp BH$ .  $CH$  chính là chiều rộng của khúc sông. Sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn để suy ra chiều rộng của khúc sông.

2.

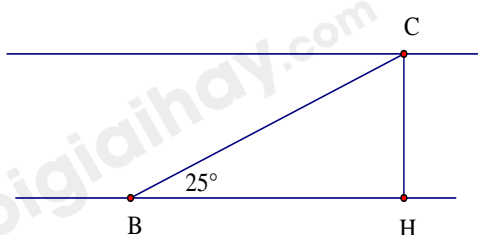
a. Sử dụng hệ thức lượng và tỉ số lượng giác để tính.

b. Sử dụng hệ thức lượng để chứng minh.

c. Chứng minh  $\triangle AEF \sim \triangle ACB$  (c.g.c)  $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AOE$  (g.g), ta có tỉ số diện tích của tam giác  $ADC$  và tam giác  $AOE \Rightarrow đpcm$ .

**Lời giải**

1)



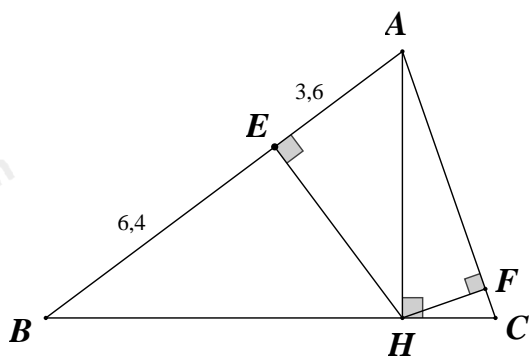
Đổi: 12 phút =  $\frac{1}{5}$  giờ

Gọi chiều rộng của khúc sông là  $CH$ . Đường đi của con thuyền là  $BK$  suy ra  $CH \perp BK$ ,  $\angle CBH = 25^\circ$

Quãng đường  $BC$  dài là:  $3,5 \cdot \frac{1}{5} = 0,7$  (km)

Xét  $\triangle BHC$  vuông tại  $H$  có:  $CH = \sin 25^\circ \cdot BC = \sin 25^\circ \cdot 0,7 \approx 0,29$  (km)

Vậy chiều rộng khúc sông khoảng 0,29 (km).



2)

a. Ta có:  $AB = AE + EB = 3,6 + 6,4 = 10$ cm

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  $AHB$  có  $\angle AHB = 90^\circ$ ;  $HE \perp AB$

Ta có:  $AH^2 = AE \cdot AB$

$\Rightarrow AH = \sqrt{3,6 \cdot 10} = \sqrt{36} = 6$ cm

Và:  $EH^2 = AE \cdot EB$

$\Rightarrow EH = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ cm

$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6$

$\Rightarrow B \approx 36^\circ 52'$

b. Xét  $\triangle ABH$  có :  $AHB = 90^\circ; HE \perp AB$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

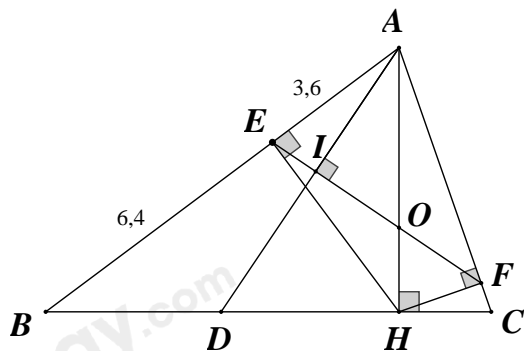
$$AB \cdot AE = AH^2 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  $AHC$  có:  $AHC = 90^\circ; HF \perp AC$

$$\Rightarrow AF \cdot AC = AH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AF$  (đpcm).

c)



Gọi I là giao điểm của  $AD$  và  $EF$

$$\text{Ta có: } AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$$

Dễ dàng chứng minh được  $\triangle AEF \sim \triangle ACB$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AFI = \angle ABH; \angle ACD = \angle AEO \quad (1)$$

$$\text{Mà } \angle CAD + \angle AFI = 90^\circ$$

$$\angle EAO + \angle ABH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EAO = \angle CAD \quad (2)$$

Từ (1); (2)  $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AOE$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{AOE}} = \left(\frac{AC}{AE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AH} \cdot \frac{AH}{AE}\right)^2 = \frac{AC^2}{AH^2} \cdot \frac{AH^2}{AE^2}$$

$$\Rightarrow S_{ADC} = \frac{S_{AOE}}{\left(\frac{AH}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{AE}{AH}\right)^2} = \frac{S_{AOE}}{\sin^2 C \cdot \cos^2 EAO} = \frac{S_{AOE}}{\sin^2 C \cdot \sin^2 B} \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 5 (0,5 điểm)** Giải phương trình  $2\sqrt{2x-1} = 8 - \sqrt[3]{x+3}$ .

**Phương pháp**

Tìm điều kiện xác định.

Đặt  $\sqrt{2x-1} = u \Rightarrow u^2 = 2x-1$ ;  $\sqrt[3]{x+3} = v \Rightarrow v^3 = x+3 \Leftrightarrow 2v^3 = 2x+6$ . Giải phương trình theo  $u$  và  $v$ .

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x-1} = u \Rightarrow u^2 = 2x-1.$$

$$\sqrt[3]{x+3} = v \Rightarrow v^3 = x+3 \Leftrightarrow 2v^3 = 2x+6.$$

$$\Rightarrow 2v^3 - u^2 = 2x+6 - (2x-1) = 7$$

$$\Leftrightarrow 2v^3 - u^2 - 7 = 0$$

$$\text{Mà } 2\sqrt{2x-1} = 8 - \sqrt[3]{x+3} \Leftrightarrow 2u = 8 - v \Leftrightarrow u = \frac{8-v}{2}.$$

$$\Rightarrow 2v^3 - \left(\frac{8-v}{2}\right)^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2v^3 - \frac{64-16v+v^2}{4} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8v^3 - 64 + 16v - v^2 - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8v^3 - v^2 + 16v - 92 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v-2)(8v^2 + 15v + 46) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = 2$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy  $x = 5$ .