ĐỀ THI HỌC KÌ I – Đề số 1

Môn: Toán - Lớp 11

Bộ sách Cánh diều

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần trắc nghiệm

Câu 1. B	Câu 2. C	Câu 3. A	Câu 4. D	Câu 5. B	Câu 6. A
Câu 7. B	Câu 8. D	Câu 9. A	Câu 10. D	Câu 11. B	Câu 12. C
Câu 13. D	Câu 14. A	Câu 15. C	Câu 16. C	Câu 17. D	Câu 18. C
Câu 19. B	Câu 20. A	Câu 21. C	Câu 22. A	Câu 23. D	Câu 24. C
Câu 25. A	Câu 26. D	Câu 27. A	Câu 28. D	Câu 29. B	Câu 30. C

Câu 1: Nếu một cung tròn có số đo là 20 độ thì số đo radian của nó là:

A. $\frac{\pi}{10}$.

B. $\frac{\pi}{9}$.

C. $\frac{\pi}{8}$.

D. $\frac{\pi}{11}$.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\alpha^0 = \alpha.\frac{\pi}{180}\text{rad}$.

Lời giải

Ta có: $20^0 = 20.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$

Đáp án B.

Câu 2: Chọn đáp án đúng

A. $\cos(a+b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

B. $\cos(a+b) = \cos a\sin b - \sin a\cos b$.

C. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.

D. $\cos(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

Lời giải

Ta có: $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Đáp án C.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Phương pháp

Phương trình $\sin x=\sin\alpha$ có nghiệm: $x=\alpha+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $x=\pi-\alpha+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Lời giải

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Đáp án A.

Câu 4: Tập xác định của D của hàm số $y=\cot x$ là:

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về tập xác định của hàm số lượng giác: Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Lời giải

Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Đáp án D.

Câu 5: Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì là:

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. π.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. 2π.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$: Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π

Lời giải

Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π

Đáp án B.

Câu 6: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. 1; 2; 3; 4; …

B. 4; 3; 2; 5; …

C. 1; 2; 1; 2; …

D. 4; 3; 1; 2; …

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về dãy số tăng: Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có: $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

Trong các dãy số trên, chỉ có dãy số 1; 2; 3; 4; … có $1 < 2 < 3 < 4...$ nên dãy số 1; 2; 3; 4; … là dãy số tăng.

Đáp án A.

Câu 7: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. 1; 2; 3; 5; 7; …

B. 1; 3; 5; 7; 9; ….

C. 1; 2; 4; 8; 16; ….

D. 1; 1; 2; 3; 4; ….

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về cấp số cộng: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Lời giải

Trong các dãy số trên, chỉ có dãy số 1; 3; 5; 7; 9; … có kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d $(d = 2)$

Đáp án B.

Câu 8: Dãy số nào dưới đây được viết dưới dạng công thức của số hạng tổng quát?

A. 1; 4; 7; 8; 10; ...

B. Dãy số gồm các số nguyên dương chia hết cho 5.

C. $u_1 = 2; u_n = 3u_{n-1} - 1$ với $n \ge 2$.

D. $u_n = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N}^*)$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về cách cho một dãy số.

Lời giải

Dãy số được viết dưới dạng công thức của số hạng tổng quát là: $u_n = \frac{1}{n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Đáp án D.

Câu 9: Biết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$. Chọn đáp án đúng

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

D. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = a$.

Phương pháp

Sử dụng quy tắc về giới hạn vô cực của dãy số: Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Lời giải

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Đáp án A.

Câu 10: Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x+1}{x}$.

B. $y = \tan x$.

C. $y = \frac{x+1}{x^2}$.

D. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hàm số liên tục trên một khoảng: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng này.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Đáp án D.

Câu 11: Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n}$ bằng:

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$

Đáp án B.

Câu 12: Giá trị của $\lim_{x\to 1}(x-3)$ là:

A. 1.

B. 2.

C. -2.

D. $+\infty$.

Phương pháp

Sử dụng quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm: Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=L, \lim_{x\to x_0} g(x)=M$ thì

$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$

Lời giải

$\lim_{x\to 1}(x-3)=1-3=-2$

Đáp án C.

Câu 13: Cho lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (ABC) // (AB’C’).

B. (B’A’C’) // (B’AC).

C. (ABC’) // (A’B’C’).

D. (ABC) // (A’B’C’).

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hình lăng trụ tam giác: Hình lăng trụ có hai đáy song song với nhau.

Lời giải

Hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có (ABC) // (A’B’C’).

Đáp án D.

Câu 14: Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $d//(\alpha)$.

B. d cắt (α).

C. d nằm trong (α).

D. d cắt a hoặc d nằm trong (α).

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng: Nếu d và (α) không có điểm chung thì $d//(\alpha)$

Lời giải

Nếu d và (α) không có điểm chung thì $d//(\alpha)$

Đáp án A.

Câu 15: Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về vị trí tương đối của hai đường thẳng: Có bốn vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b trong không gian: cắt nhau, trùng nhau, song song và chéo nhau.

Lời giải

Hai đường thẳng a và b có thể: cắt nhau, trùng nhau, song song, chéo nhau.

Đáp án C.

Câu 16: Nếu d là giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì:

A. $d \subset (P)$.

B. $d \subset (Q)$.

C. Cả a và b đều đúng.

D. Cả a và b đều sai.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về giao tuyến của hai mặt phẳng: Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Lời giải

Vì d là giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì $d \subset (P)$ và $d \subset (Q)$

Đáp án C.

Câu 17: Cho tứ diện ABCD. Chọn đáp án đúng.

A. AB và CD là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

B. AB và CD là hai đường thẳng cắt nhau.

C. AB và CD là hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng.

D. AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hai đường thẳng chéo nhau: Nếu hai đường thẳng a và b không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào thì ta nó a và b chéo nhau.

Lời giải

Vì hai đường thẳng AB và CD không cùng nằm trong một mặt phẳng nào nên AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Đáp án D.

Câu 18: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x + 1$ bằng:

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hàm số lượng giác: $-1 \le \cos x \le 1$ với mọi số thực x.

Lời giải

Vì $\cos x \le 1\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\cos x \le 2\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\cos x + 1 \le 3\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x + 1$ là 3

Đáp án C.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos^2 x - \sin^2 x - m = 0$ có nghiệm?

A. $m \ge 1$.

B. $-1 \le m \le 1$.

C. $m \le 1$.

D. $m \ge 0$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = m$: Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \le 1$

Lời giải

Ta có: $\cos^2 x - \sin^2 x - m = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = m\left(1\right)$

Để phương trình (1) có nghiệm thì $|m| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$

Đáp án B.

Câu 20: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Lời giải

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mà $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Do đó, $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Đáp án A.

Câu 21: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases} \left(n \ge 3, n \in \mathbb{N}\right)$. Giá trị của $u_3 + u_4$ là:

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Phương pháp

Tính các giá trị u_3 và u_4 rồi tính tổng.

Lời giải

Ta có: $u_3 = u_2 + 2u_1 = 1 + 2.1 = 3; u_4 = u_3 + 2u_2 = 3 + 2.1 = 5$. Do đó, $u_3 + u_4 = 3 + 5 = 8$

Đáp án C.

Câu 22: Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1 = 2, q = 3$. Tính tổng của mười số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. 59048.

B. 59084.

C. 59050.

D. 59080.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân: Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với công bội $q \neq 1$. Khi đó, tổng của n số hạng đầu tiên trong cấp số nhân là: $S_n = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

Lời giải

Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là: $S = \frac{2.\left(1-3^{10}\right)}{1-3} = 59048$

Đáp án A.

Câu 23: Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $u_1 = 2; d = 3$. Khi đó, $u_4 + u_6$ bằng:

A. 24.
B. 30.
C. 26.
D. 28.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức: $u_n = u_1 + \left(n-1\right)d$.

Lời giải

Ta có: $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3.3 = 11; u_6 = u_1 + 5d = 2 + 5.3 = 17$

Do đó, $u_4 + u_6 = 11 + 17 = 28$

Đáp án D.

Câu 24: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-16}{x-2}$ là:

A. 2.
B. 0.
C. $-\infty$.
D. $+\infty$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức tính giới hạn của thương $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f\left(x\right) = L < 0$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} g\left(x\right) = 0$ và $g\left(x\right) > 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = -\infty$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(x-16\right) = 2 - 16 = -14 < 0, \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x-2\right) = 0$

Với $x \to 2^+$ thì $x > 2$ nên $x - 2 > 0$. Do đó, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-16}{x-2} = -\infty$

Đáp án C.

Câu 25: Biết rằng $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = a\sqrt{b}$ (với a, b là các số nguyên). Chọn đáp án đúng.

A. $a^2 + b^2 = 13$.
B. $a^2 + b^2 = 9$.

C. $a^2 + b^2 = 6$.

D. $a^2 + b^2 = 11$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về giới hạn hàm số để làm: Nhận thấy $x = \sqrt{3}$ là nghiệm của cả tử thức và mẫu thức nên ta cần rút phân thức trước khi tính giới hạn.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Do đó, $a = 2, b = 3$. Suy ra: $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

Đáp án A.

Câu 26: Với giá trị nào của m thì hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \ne 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$?

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hàm số liên tục: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0.

Hàm số $f\left(x\right)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số f(x) là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(2x+1\right) = -1$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = -1$ khi $f\left(-1\right) = \lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right) \Leftrightarrow m = -1$

Đáp án D.

Câu 27: Cho tam giác ABC và một điểm S không thuộc mặt phẳng ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SBN) và (SCM) là:

A. SG với G là giao điểm của BN và MC.

B. SN.

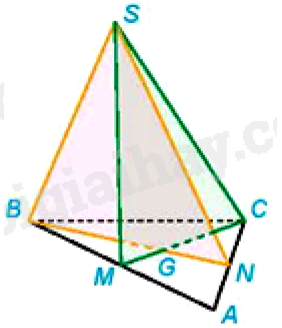
C. SM.

D. AG với G là giao điểm của BN và MC.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về giao tuyến của hai mặt phẳng: Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Lời giải



Xét mặt phẳng (ABC), gọi G là giao điểm của BN và CM.

Vì $G \in BN \Rightarrow G \in (SBN); G \in CM \Rightarrow G \in (SCM)$ nên G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBN) và (SCM)

Ta có: $S \in SB \Rightarrow S \in (SBN), S \in SC \Rightarrow S \in (SCM)$ nên S là điểm chung của hai mặt phẳng (SBN) và (SCM)

Do đó, SG là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBN) và (SCM).

Đáp án A.

Câu 28: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Xác định được tất cả bao nhiêu từ 3 trong 4 điểm đã cho?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về cách xác định một mặt phẳng: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định qua ba điểm không thẳng hàng.

Lời giải

Ta xác định được các mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD), (BCD). Do đó, xác định được 4 mặt phẳng.

Đáp án D.

Câu 29: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là:

A. Đường thẳng m qua S vuông góc với AB.

B. Đường thẳng m qua S song song với AB.

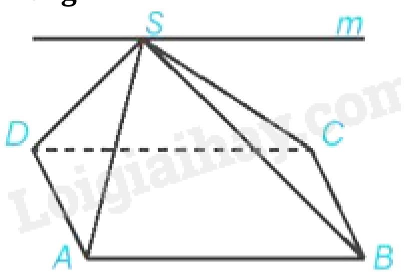
C. SO với O là giao điểm của AC và BD.

D. Cả A, B, C đều sai.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về giao tuyến của hai mặt phẳng: Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Lời giải



Ta có: Vì ABCD là hình bình hành nên AB // CD. Mà $AB \subset (SAB), CD \subset (SCD)$

Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng m qua S song song với AB.

Đáp án B.

Câu 30: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' có AC cắt BD tại O và A'C' cắt B'D' tại O'. Khi đó, mặt phẳng (AB'D') song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (A'OC').

B. (BDA').

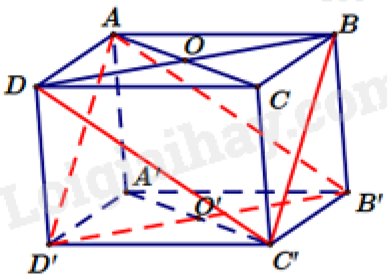
C. (BDC').

D. (BCD).

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về hai mặt phẳng song song: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Lời giải



Vì BD // B'D' nên B'D' // (BDC'). Vì AD' // BC' nên AD' // (BDC')

Lại có hai đường thẳng AD' và B'D' cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (AB'D'). Do đó, (AB'D') // (BDC')

Đáp án C.

Phần tự luận (3 điểm)

Bài 1. (1 điểm) Tính giới hạn sau: $I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sqrt{3+x} - 4x}{2x - 2}$

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về giới hạn của hàm số: Rút gọn biểu thức $\dfrac{2\sqrt{3+x} - 4x}{2x-2}$ rồi áp dụng quy tắc về giới hạn để tính.

Lời giải

$$I = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2\sqrt{3+x} - 4x}{2x-2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\left(2\sqrt{3+x} - 4x\right)\left(2\sqrt{3+x} + 4x\right)}{2(x-1)\left(2\sqrt{3+x} + 4x\right)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{4(x+3) - 16x^2}{2(x-1)\left(2\sqrt{3+x} + 4x\right)}$$

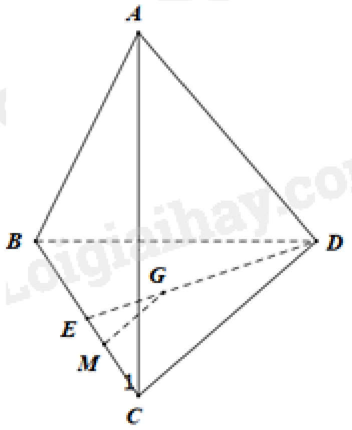
$$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{-16x^2 + 4x + 12}{2(x-1)\left(2\sqrt{3+x} + 4x\right)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-4(x-1)(4x+3)}{4(x-1)\left(\sqrt{3+x} + 2x\right)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-(4x+3)}{\sqrt{3+x} + 2x} = \frac{-7}{4}$$

Bài 2. (1 điểm) Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng MG // (ACD)

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về đường thẳng song song với mặt phẳng: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P).

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC. Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\frac{GD}{ED}=\frac{2}{3}$

Mà $MB=2MC\Rightarrow 3MC=BC$. Lại có: $EC=BE=\frac{1}{2}BC\Rightarrow \frac{MC}{EC}=\frac{2}{3}$

Tam giác EDC có: $\frac{GD}{ED}=\frac{MC}{EC}\left(=\frac{2}{3}\right)$ nên MG // CD (định lý Thalès đảo)

Mà $CD\subset(ACD)$ nên MG // (ACD)

Bài 3. (0,5 điểm) Cho hai số thực a và b thỏa mãn điều kiện $\sin(a+b)-2\cos(a-b)=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{1}{2-\sin 2a}+\frac{1}{2-\sin 2b}$.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

Lời giải

$$A=\frac{1}{2-\sin 2a}+\frac{1}{2-\sin 2b}=\frac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{(2-\sin 2a)(2-\sin 2b)}=\frac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{4-2(\sin 2a+\sin 2b)+\sin 2a.\sin 2b}$$

Vì $\sin(a+b)-2\cos(a-b)=0\Rightarrow\sin(a+b)=2\cos(a-b)$

Ta có: $4-(\sin 2a+\sin 2b)=4-2\sin(a+b)\cos(a-b)=4-4\cos^2(a-b)=4\sin^2(a-b)$

Lại có: $4-2(\sin 2a+\sin 2b)+\sin 2a.\sin 2b$

$$=4-4\sin(a+b)\cos(a-b)+\frac{1}{2}\left[\cos(2a-2b)-\cos(2a+2b)\right]$$

$$=4-8\cos^2(a-b)+\frac{1}{2}\left[2\cos^2(a-b)-1-1+2\sin^2(a+b)\right]$$

$$=3-7\cos^2(a-b)+\sin^2(a+b)=3-3\cos^2(a-b)=3\sin^2(a-b)$$

Vậy $A=\frac{4\sin^2(a-b)}{3\sin^2(a-b)}=\frac{4}{3}$

Bài 4. (0,5 điểm) Chứng minh rằng dãy số $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ tăng và bị chặn trên.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về dãy số tăng: Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1}>u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

Sử dụng kiến thức về dãy số bị chặn trên: Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0 \Rightarrow (u_n)$ tăng

Nhận thấy $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.