ĐỀ THI HỌC KÌ I – Đề số 27

Môn: Toán - Lớp 9

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập kiến thức học kì 1 của chương trình sách giáo khoa Toán 9.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải các kiến thức chương trình Toán 9.

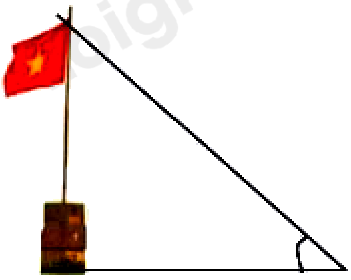
Câu 1: (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính :

a) $\sqrt{20}-3\sqrt{125}+5\sqrt{45}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-5\sqrt{2}$

2) Một cột cờ vuông góc với mặt đất có bóng dài $12m$, tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc là 35^0 (hình vẽ bên). Tính chiều cao của cột cờ.



....

....

....

....

....

Câu 2: (2,0 điểm)

Cho các biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$; $B=\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0;\ x\ne 4$)

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

b) Rút gọn B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên

………
………
………
………
………

Câu 3: Cho hàm số bậc nhất $y = (m+1)x + 2$ có đồ thị (d) (m *là tham số và* $m \neq -1$)

a) Vẽ (d) khi $m = 0$.

b) Xác định m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.

c) Xác định m để (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (*đơn vị diện tích*).

………
………
………
………
………

Câu 4: (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là AB chứa nửa đường tròn, vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi E là giao điểm của CO và AM, F là giao điểm của DO và BM.

a) Chứng minh 4 điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AC + BD = CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tích $AC.BD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

………
………
………
………
………

Câu 5: (0,5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2019 - x$.

………
………
………
………
………

-------- Hết --------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

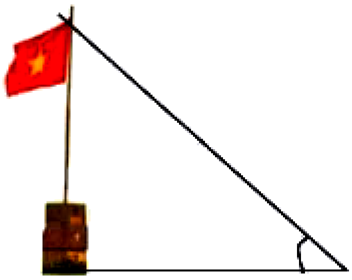
Câu 1: (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính :

a) $\sqrt{20}-3\sqrt{125}+5\sqrt{45}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-5\sqrt{2}$

2) Một cột cờ vuông góc với mặt đất có bóng dài $12m$, tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc là 35^0 (hình vẽ bên). Tính chiều cao của cột cờ.



Phương pháp

1) a) Sử dụng công thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn : Với $B\ge 0$ ta có :

$$\sqrt{A^2B}=|A|B=\begin{cases}AB\ \ khi\ \ A\ge 0\\ -AB\ \ khi\ \ A<0\end{cases}.$$

b) Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$ và trục căn thức ở mẫu :

$$\frac{m}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{m\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}\ (A,B\ge 0;A\ne B)$$

2) Sử dụng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác.

Trong tam giác vuông, cạnh góc vuông này bằng cạnh góc vuông còn lại nhân tan góc đối.

Lời giải

1)

$a)\ \sqrt{20}-3\sqrt{125}+5\sqrt{45}$

$=2\sqrt{5}-15\sqrt{5}+15\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-5\sqrt{2}$

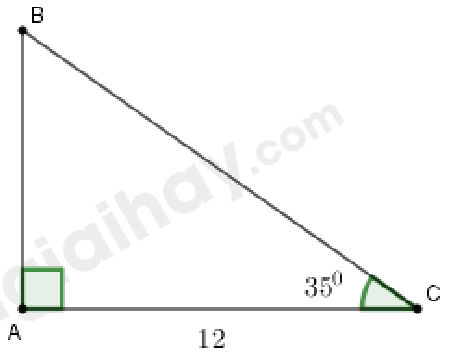
$=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}-2\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-5\sqrt{2}$

$=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-5\sqrt{2}$

$=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}$

2)



Ta đưa về bài toán: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC=12m,\ \angle BCA=35^0.$ Tính $AB.$

Chiều cao cột là AB.

Do ΔABC vuông tại A nên ta có :

$AB=AC.\tan C$

$=12.\tan 35^\circ$

$=8,402\ (m)$

Câu 2: Cho các biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2};\quad B=\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0;\ x\ne 4$)

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

b) Rút gọn B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị là số nguyên

Phương pháp

a) Thay $x=36\left(tmdk\right)$ vào rồi tính toán.

b) Quy đồng mẫu các phân thức sau đó cộng các phân thức để rút gọn.

c) Đưa P về dạng $P=a+\dfrac{b}{f\left(x\right)}\ \left(a,b\in\mathbb{Z}\right).$

Khi đó để $P\in\mathbb{Z}\Rightarrow f\left(x\right)\in U\left(b\right)$ từ đó tìm ra $x.$

Lời giải

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

Điều kiện: $x\ge 0,\ x\ne 4.$

Thay $x=36$ (Thỏa mãn đkxđ) vào biểu thức A ta được:

$$A=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}+2}=\frac{6}{6+2}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Vậy với $x=36$ thì $A=\frac{3}{4}$.

b) Rút gọn B.

Điều kiện: $x\ge 0,\ x\ne 4.$

$$B=\frac{x}{x-4}-\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

Vậy $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ (với $x\ge 0;\ x\ne 4$).

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị là số nguyên.

Với ĐKXĐ : $x\ge 0$ và $x\ne 4$ ta có:

$$P=A.B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{x}{x-4}=\frac{x-4+4}{x-4}=1+\frac{4}{x-4}$$

Do x là số nguyên nên $x-4$ là số nguyên.

Do đó: $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{4}{x-4}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-4\in U(4)=\{-4;-2;-1;1;\ 2;\ 4\}$

Suy ra $x\in\{0;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 8\}$.

Kết hợp với ĐKXĐ và x là số nguyên ta được $x\in\{0;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 8\}$.

Câu 3: (2,0 điểm)

Cho hàm số bậc nhất $y=(m+1)x+2$ có đồ thị (d) (m *là tham số và* $m\ne -1$)

a) Vẽ (d) khi $m=0$.

b) Xác định m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y=2x+1$.

c) Xác định m để (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (*đơn vị diện tích*).

Phương pháp

a) Đường thẳng $(d): y = ax + b\,(a \ne 0)$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0;b), \left(-\frac{b}{a};0\right)$.

b) Hai đường thẳng $(d): y = ax + b, (d'): y = a'x + b'$ song song với nhau khi $\begin{cases} a = a' \\ b \ne b' \end{cases}$.

c) Tính $OA, OB \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.$

Lời giải

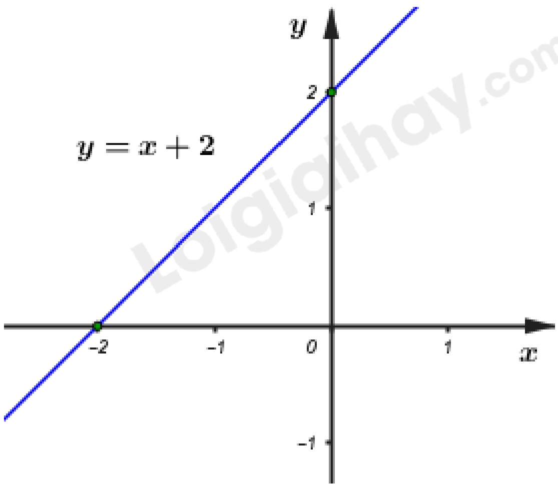
a) Khi $m = 0$ ta có $(d): y = x + 2$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2$

$x = -2 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm có tọa độ $(0;2), (-2;0)$.

Hình vẽ:



b) Xác định m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 1$

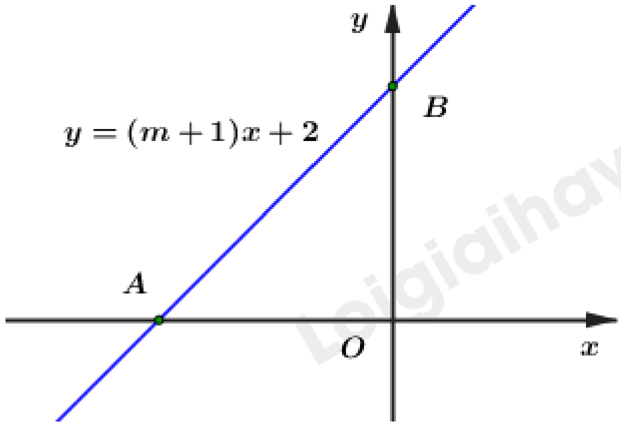
$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 2 \\ 2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Kết hợp điều kiện $m \ne -1$ ta có $m = 1\,(tm)$.

Vậy $m = 1$.

c) Xác định m để (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích)

Do $m \ne -1$ nên không mất tính tổng quát ta giả sử (d) cắt Ox và Oy như hình vẽ



Vì A là giao điểm của (d) với Ox nên $A(x;0) \Rightarrow (m+1)x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{m+1}$

Suy ra $A\left(-\dfrac{2}{m+1};0\right) \Rightarrow OA=\dfrac{2}{|m+1|}$

Vì B là giao điểm của (d) với Oy nên $B(0;y) \Rightarrow (m+1).0+2=y \Rightarrow y=2$

Suy ra $B(0;2) \Rightarrow OB=2$

Vì ΔOAB vuông tại O.

Khi đó: $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{|m+1|}.2=\dfrac{2}{|m+1|}$

Mà $S_{\Delta OAB}=2 \Leftrightarrow |m+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=1 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m \neq -1$)

Vạy $m=0$ hoặc $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là AB chứa nửa đường tròn, vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi E là giao điểm của CO và AM, F là giao điểm của DO và BM.

a) Chứng minh 4 điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AC+BD=CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tích $AC.BD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

Phương pháp

a) Tam giác vuông nội tiếp đường tròn có đường kính là cạnh huyền của nó

b) Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau và dấu hiệu : Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

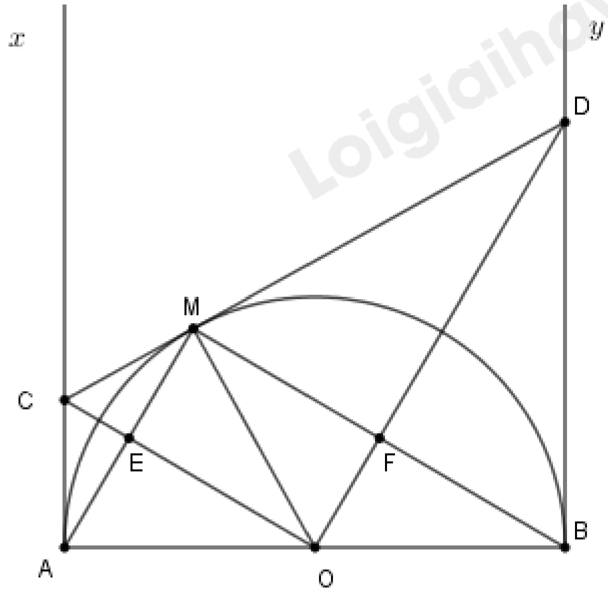
Chú ý : Tam giác nội tiếp đường tròn mà có 1 cạnh là đường kính của đường tròn thì tam giác đó là tam giác vuông.

c) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

d) Sử dụng kết quả câu b) câu c) và bất đẳng thức Cô-si cho hai số a,b không âm : $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a=b.$

Lời giải



a) Chứng minh 4 điểm A,C,M,O cùng thuộc một đường tròn.

Vì tam giá ΔOAC vuông tại A nên nó nội tiếp đường tròn đường kính CO (1)

Lại có ΔOMC vuông tại M (do MC là tiếp tuyến tại M) nên nó nội tiếp đường tròn đường kính CO (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A,C,M,O$ cùng thuộc một đường tròn có đường kính CO (đpcm).

b) Chứng minh $AC+BD=CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

+) Xét đường tròn (O) có CM và CA là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $AC=CM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Và DM và DB là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $DM=DB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $AC+BD=CM+MD=CD$ (đpcm).

+) CM Tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật

Ta có $CM=CA(cmt);OM=OA=R$ nên OC là đường trung trực của đoạn $AM\Rightarrow OC\perp AM$ tại $E\Rightarrow MEO=90^0$. (3)

Tương tự ta có $MFO=90°$ (4)

Xét ΔAMB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên ΔMAB vuông tại M $\Rightarrow EMF=90°$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow$ tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật (đpcm).

c) Chứng minh tích $AC.BD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

Do $MEOF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \Delta COD$ vuông tại O.

Có CD là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MO\perp CD$ tại M.

Suy ra MO là đường cao của ΔCOD, do đó $CM.MD = OM^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ ý a) ta có $AC = CM$; $BD = MD \Rightarrow AC.BD = CM.MD = R^2$ (không đổi) (đpcm).

d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

Ta có : AC, BD là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow AC \perp AB;\ BD \perp AB \Rightarrow AC//BD$

Do đó: $ABCD$ là hình thang vuông có AB là đường cao.

Khi đó ta có : $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB(AC+BD) = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}AB(AC+BD) \overset{Co-si}{\geq} \frac{1}{2}AB.2.\sqrt{AC.BD} = 2R^2$

(do theo câu b) ta có $CD = AC + BD$ và theo câu c) ta có $AC.BD = R^2$)

Nên $\min S_{ABCD} = 2R^2 \Leftrightarrow CD = AB \Leftrightarrow CD//AB \Leftrightarrow MO \perp AB$ (do $MO \perp CD$)

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB.

Câu 5: (0,5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2019 - x$.

Phương pháp

Sử dụng hằng đẳng thức $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Đưa về dạng $m - A^2 \leq m$

Dấu = xảy ra khi $A = 0$.

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2019 - x$.

Với điều kiện : $x \geq 2$ ta có:

$$2A = 2\left(\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-1} + 2019 - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2A = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x-1} + 4038 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2A = 2042 - \left(x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1\right) - \left(x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2A = 4042 - \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 - \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2$$

Vì $\left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 \geq 0; \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq 2$

$$\Rightarrow 2A \leq 4042 \Rightarrow A \leq 2021$$

$\Rightarrow \max A = 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn ĐK $x \geq 2$).