ĐỀ THI GIỮA KÌ II – Đề số 3

Môn: Toán - Lớp 11

Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần trắc nghiệm

Câu 1. A	Câu 2. B	Câu 3. B	Câu 4. D	Câu 5. C	Câu 6. A	Câu 7. D
Câu 8. B	Câu 9. B	Câu 10. C	Câu 11. D	Câu 12. A	Câu 13. D	Câu 14. C
Câu 15. B	Câu 16. C	Câu 17. C	Câu 18. C	Câu 19. B	Câu 20. A	Câu 21. A
Câu 22. C	Câu 23. B	Câu 24. A	Câu 25. D	Câu 26. A	Câu 27. A	Câu 28. A
Câu 29. B	Câu 30. B	Câu 31. D	Câu 32. C	Câu 33. D	Câu 34. A	Câu 35. B

Câu 1: Cho $a>0,m,n\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. **B.** $\frac{a^m}{a^n}=a^{m+n}$. **C.** $\frac{a^m}{a^n}=a^{m.n}$. **D.** $\frac{a^m}{a^n}=a^{n-m}$.

Phương pháp

Cho $a>0,m,n\in\mathbb{R}$. Khi đó: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

Lời giải

Cho $a>0,m,n\in\mathbb{R}$. Khi đó: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

Đáp án A.

Câu 2: Chọn đáp án đúng.

Cho số dương a. Khi đó:

A. $a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[4]{a^3}$. **B.** $a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^4}$. **C.** $a^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[\frac{4}{3}]{a}$.

Phương pháp

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r=\frac{m}{n}$, trong đó $m,n\in\mathbb{Z},n>0$. Ta có: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Lời giải

$a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^4}$

Đáp án B.

Câu 3: Chọn đáp án đúng:

A. $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6}=1-\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6}=-1+\sqrt{3}$.

C. $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6}=1+\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6}=-1-\sqrt{3}$.

Phương pháp

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ khi n chẵn (với các biểu thức đều có nghĩa).

Lời giải

$\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6} = -1+\sqrt{3}$.

Đáp án B.

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y+xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ (với $x, y > 0$) được kết quả là:

A. y. **B.** x. **C.** $xy^{\frac{1}{3}}$. **D.** xy.

Phương pháp

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Ta có: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Lời giải

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}y+xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{xy\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}} = xy$$

Đáp án D.

Câu 5: Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_o a^d$, trong đó I_o là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là một hằng số dương, d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét). Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng 90% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Giá trị của a là:

A. $a = 9$. **B.** $a = \dfrac{1}{9}$. **C.** $a = \dfrac{9}{10}$. **D.** $a = \dfrac{10}{9}$.

Phương pháp

$a^1 = a$

Lời giải

Với $d = 1, I = \dfrac{90}{100}I_o$ thay vào $I = I_o a^d$ ta có: $\dfrac{90}{100}I_o = I_o a^1 \Rightarrow a = \dfrac{9}{10}$. Vậy $a = \dfrac{9}{10}$.

Đáp án C.

Câu 6: Chọn đáp án đúng.

Với $a, b > 0$ thì:

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln(ab) = \ln a.\ln b$.

C. $\ln(a^b) = \ln a.\ln b$. **D.** $\ln(a+b) = \ln a.\ln b$.

Phương pháp

Với $a, b > 0$ thì $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Lời giải

Với $a, b > 0$ thì $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Đáp án A.

Câu 7: Chọn đáp án đúng.

A. $\log_7 9 = \log_3 7.\log_3 9$. **B.** $\log_7 9 = \log_3 7 + \log_3 9$.

C. $\log_7 9 = \dfrac{\log_3 7}{\log_3 9}$.

D. $\log_7 9 = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 7}$.

Phương pháp

Với a, b, c là các số dương và $a \ne 1, b \ne 1$ thì $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

Lời giải

$\log_7 9 = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 7}$

Đáp án D.

Câu 8: Với $0 < a \ne 1$ thì:

A. $\log_a a = 0$.

B. $\log_a a = 1$.

C. $\log_a a = -1$.

D. $\log_a a = a$.

Phương pháp

Với $0 < a \ne 1$ thì $\log_a a = 1$.

Lời giải

Với $0 < a \ne 1$ thì $\log_a a = 1$.

Đáp án B.

Câu 9: Trong Hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log\left[H^+\right]$, trong đó $\left[H^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Tính nồng độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,001 mol/lít.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Phương pháp

Với a là số thực dương và $a \ne 1$ thì $\log_a a^\alpha = \alpha$

Lời giải

Với $\left[H^+\right] = 0,001$ thay vào $pH = -\log\left[H^+\right]$ ta có:

$pH = -\log\left[H^+\right] = -\log 0,001 = -\log 10^{-3} = 3$

Vậy nồng độ pH của dung dịch bằng 3.

Đáp án B.

Câu 10: Chọn đáp án đúng: *(Các biểu thức trên đều có nghĩa)*

A. $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 1$.

B. $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -1$.

C. $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$.

D. $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 2$.

Phương pháp

Với a là số thực dương và $a \ne 1$ thì $\log_a 1 = 0$.

Với $0 < a \ne 1, b, c > 0$ thì $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải

$\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log_a\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$

$= \log_a\left(x^2 - x^2 + 1\right) = \log_a 1 = 0$

Đáp án C.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ luôn:

A. Nằm phía trên trục hoành.

B. Nằm phía dưới trục hoành.

C. Nằm bên trái trục tung.

D. Nằm bên phải trục tung.

Phương pháp

Đồ thị hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ luôn nằm bên phải trục tung.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ luôn nằm bên phải trục tung.

Đáp án D.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ cơ số 3?

A. $y = 3^x$.

B. $y = \log_x 3$.

C. $y = \log_3 x$.

D. $y = \ln\left(3x\right)$.

Phương pháp

Hàm số $y = a^x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Lời giải

Hàm số $y = 3^x$ có cơ số là 3.

Đáp án A.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây **không** phải là hàm số lôgarit?

A. $y = \ln\left(2x^4\right)$.

B. $y = \log\left(x^2 + 10\right)$.

C. $y = \log_4 \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

D. $y = 2^{\ln 4}$.

Phương pháp

Hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

Lời giải

Hàm số $y = 2^{\ln 4}$ không phải là hàm số lôgarit

Đáp án D.

Câu 14: Hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ liên tục trên:

A. $\left(-\infty; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; 0\right)$.

C. $\left(0; +\infty\right)$.

D. $\left(-a; a\right)$.

Phương pháp

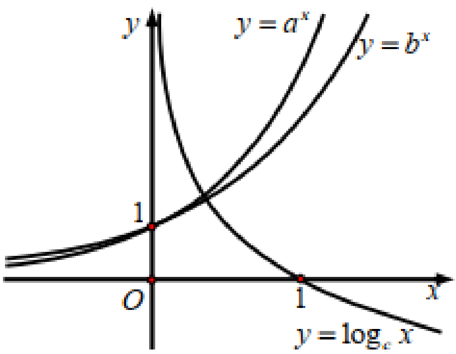
Hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ liên tục trên $\left(0; +\infty\right)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ liên tục trên $\left(0; +\infty\right)$.

Đáp án C.

Câu 15: Cho đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$ như hình vẽ dưới



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a > b > c > 1$. **B.** $a > b > 1 > c$. **C.** $a > 1 > b > c$. **D.** $a < b < c < 1$.

Phương pháp

Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \ne 1\right)$ nghịch biến trên $\left(0; +\infty\right)$.

Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = a^x\left(a > 0\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta thấy hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến nên $c < 1$.

Hàm số $y = a^x, y = b^x$ đồng biến nên $a > 1, b > 1$.

Xét tại $x = 1$ thì đồ thị hàm số $y = a^x$ có tung độ lớn hơn tung độ của đồ thị hàm số $y = b^x$ nên $a > b$. Do đó, $a > b > 1 > c$.

Đáp án B.

Câu 16: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \log_{\sqrt{3}} x$. Biết rằng: $\max\limits_{x \in [3;9]} y = M, \min\limits_{x \in [3;9]} y = m$. Khi đó:

A. $M + m = 2$. **B.** $M + m = 5$. **C.** $M + m = 6$. **D.** $M + m = 4$.

Phương pháp

Cho hàm số $y = \log_a x\left(a > 0, a \ne 1\right)$:

+ Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left(0; +\infty\right)$.

+ Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\left(0; +\infty\right)$.

Lời giải

Hàm số $y = f\left(x\right) = \log_{\sqrt{3}} x$ có $\sqrt{3} > 1$ nên đồng biến trên $\left(0; +\infty\right)$.

Do đó, $\min\limits_{x \in [3;9]} y = f\left(3\right) = \log_{\sqrt{3}} 3 = 2, \max\limits_{x \in [3;9]} y = f\left(9\right) = \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

Do đó, $M + m = 6$

Đáp án C.

Câu 17: Bất phương trình $a^x > b\left(0 < a \ne 1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi:

A. $b > 0$. **B.** $b \ge 0$. **C.** $b \le 0$. **D.** $b \ne 0$.

Phương pháp

Bất phương trình $a^x > b\left(0 < a \ne 1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $b \le 0$.

Lời giải

Bất phương trình $a^x > b\left(0 < a \ne 1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $b \le 0$.

Đáp án C.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}\right)^x > 5$ là:

A. $S = \left(-\infty; 2\right)$. **B.** $S = \left(-\infty; 2\right]$. **C.** $S = \left(2; +\infty\right)$. **D.** $S = \left[2; +\infty\right)$.

Phương pháp

Với $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u\left(x\right) > v\left(x\right)$.

Lời giải

$\left(\sqrt{5}\right)^x > 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x > \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x > 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(2; +\infty\right)$

Đáp án C.

Câu 19: Phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ có nghiệm là:

A. $x=-4$. **B.** $x=4$. **C.** $x=\frac{-1}{4}$. **D.** $x=\frac{1}{4}$.

Phương pháp

Phương trình $\log_a x=b\left(a>0,a\ne 1\right)$ luôn có nghiệm duy nhất $x=a^b$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=-2\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm $x=4$.

Đáp án B.

Câu 20: Nếu x và y thỏa mãn $4^x=16$ và $3^{x+y}=729$ thì y bằng:

A. $y=4$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-4$. **D.** $y=-3$.

Phương pháp

$a^{u(x)}=a^{v(x)}\Leftrightarrow u(x)=v(x)$

Lời giải

$4^x=16\Leftrightarrow 4^x=4^2\Leftrightarrow x=2$

Khi đó: $3^{x+y}=729\Leftrightarrow 3^{2+y}=3^6\Leftrightarrow y+2=6\Leftrightarrow y=4$

Đáp án A.

Câu 21: Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A=P(1+r)^t$ (đồng). Thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp ba là:

A. $t=\log_{1+r}3$ năm. **B.** $t=\log_3(1+r)$ năm.

C. $t=\log_{1+r}2$ năm. **D.** $t=\log_2(1+r)$ năm.

Phương pháp

Cho phương trình $a^x=b\left(a>0,a\ne 1\right)$. Nếu $b>0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\log_a b$.

Lời giải

Để số tiền ban đầu tăng gấp ba thì $A=3P$. Thay $A=3P$ vào $A=P(1+r)^t$ ta có:

$3P=P(1+r)^t\Leftrightarrow (1+r)^t=3\Leftrightarrow t=\log_{1+r}3$ (năm)

Đáp án A.

Câu 22: Bất phương trình $\log_{\frac{1}{6}}(x+3)+\log_{\frac{1}{6}}(x+2)\ge -1$ có nghiệm là:

A. $-2\le x\le 3$. **B.** $-2<x<3$. **C.** $-2<x\le 0$. **D.** $-5\le x\le 0$.

Phương pháp

Nếu $0<a<1$ thì $\log_a u(x)\ge \log_a v(x)\Leftrightarrow \begin{cases} u(x)>0 \\ u(x)\le v(x)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x>-2$

$\log_{\frac{1}{6}}(x+3)+\log_{\frac{1}{6}}(x+2)\ge -1\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{6}}\left[(x+2)(x+3)\right]\ge \log_{\frac{1}{6}}6\Leftrightarrow x^2+5x+6\le 6\Leftrightarrow x^2+5x\le 0$

$\Leftrightarrow x(x+5)\le 0\Leftrightarrow -5\le x\le 0$

Kết hợp với điều kiện ta có: $-2 < x \le 0$.

Đáp án C.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-x} \le 4.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là:

A. $S=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **C.** $S=\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **D.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Phương pháp

Với $a > 1$ thì $a^{u(x)} \le a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \le v(x)$.

Lời giải

$$2^{x^2-x} \le 4.\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \le 2^{2-x} \Leftrightarrow x^2 - x \le 2 - x \Leftrightarrow x^2 \le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Đáp án B.

Câu 24: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn.

C. Góc giữa hai đường thẳng có thể là góc tù.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Phương pháp

+ Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^0.

+ Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$ nên câu A đúng.

Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^0 nên câu b, c đều sai.

Đáp án A.

Câu 25: Góc giữa hai đường thẳng **không** thể bằng:

A. 40^0. **B.** 50^0. **C.** 90^0. **D.** 160^0.

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^0.

Lời giải

Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^0 nên góc giữa hai đường thẳng không thể bằng 160^0.

Đáp án D.

Câu 26: Cho hình chóp S. ABCD có ABCD là hình chữ nhật và I là 1 điểm thuộc cạnh AB sao cho $SI \perp AB$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng CD và SI bằng bao nhiêu độ?

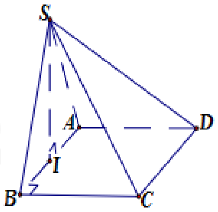
A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 70^0.

Phương pháp

+ Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0

+ Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng còn lại.

Lời giải



Vì ABCD là chữ nhật AB//CD. Mà $SI \perp AB$ nên $SI \perp CD$. Do đó, góc giữa hai đường thẳng SI và CD bằng 90^0.

Đáp án A.

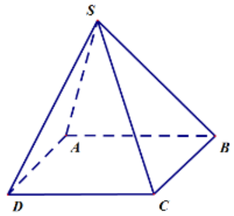
Câu 27: Cho hình chóp S. ABCD có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng SA và DC bằng:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 120^0. **D.** 70^0.

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải



Tứ giác ABCD có $AB = BC = CD = DA$ nên tứ giác ABCD là hình thoi. Do đó, DC//AB.

Suy ra: $(SA, DC) = (SA, AB) = SAB$

Tam giác SAB có: $SA = SB = AB$ nên tam giác SAB là tam giác đều. Do đó, $SAB = 60^0$

Đáp án A.

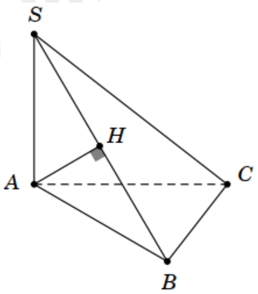
Câu 28: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm:

A. A. **B.** B. **C.** C. **D.** H.

Phương pháp

Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tùy ý trong không gian. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P). Gọi M' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, điểm M' được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P).

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là điểm A.

Đáp án A.

Câu 29: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $AA' \perp (ABCD)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

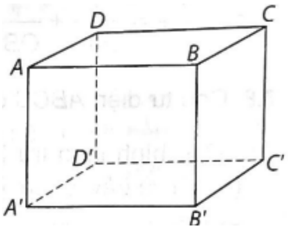
A. (ABCD)⊥ (A'B'C'D'). **B.** $AA' \perp (A'B'C'D')$.

C. Cả A và B đều đúng. **D.** Cả A và B đều sai.

Phương pháp

Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải



Vì ABCD.A’B’C’D là hình hộp nên (ABCD)// (A’B’C’D), mà $AA'\perp(ABCD)$ nên $AA'\perp(A'B'C'D')$.

Đáp án B.

Câu 30: Chọn đáp án đúng.

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b song song với mặt phẳng (P). Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng:

A. 30^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 0^0.

Phương pháp

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.

Lời giải

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b. Do đó, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90^0

Đáp án B.

Câu 31: Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng b cắt mặt phẳng (P).

B. Đường thẳng b song song mặt phẳng (P).

C. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P).

Phương pháp

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a thì đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P).

Lời giải

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a thì đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P).

Đáp án D.

Câu 32: Một chiếc cột dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột 30cm. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B cách đều O là 40cm (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng 50cm.

Chọn khẳng định đúng.

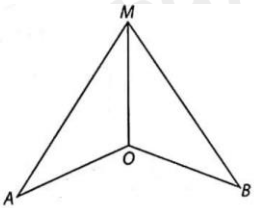
A. Tam giác MOB là tam giác tù. **B.** Tam giác MAO là tam giác nhọn.

C. $MO\perp(AOB)$. **D.** Cả A, B, C đều đúng.

Phương pháp

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d\perp(P)$.

Lời giải



Vì $50^2 = 30^2 + 40^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$

Do đó, tam giác MOA vuông tại O và tam giác MOB vuông tại O.

Suy ra, $MO \perp OA, MO \perp OB$

Mà OA và OB cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OAB). Do đó, $MO \perp (AOB)$.

Đáp án C.

Câu 33: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm:

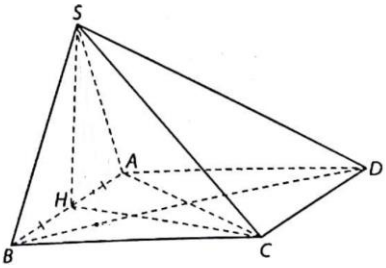
A. A. **B.** B. **C.** C. **D.** H.

Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.

+ Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tùy ý trong không gian. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P). Gọi M’ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, điểm M’ được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P).

Lời giải



Vì tam giác ABS đều nên SH là đường trung tuyến đồng thời là đường cao.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác SHB vuông tại H có:

$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác CHB vuông tại B có:

$$CH = \sqrt{BC^2 + HB^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Ta có: $SH^2 + HC^2 = SC^2 \left(\text{do} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \right)$ nên tam giác SHC vuông tại H.

Suy ra: $SH \perp HC$

Lại có: $SH \perp AB$, HC và AB cắt nhau tại H và nằm trong mặt phẳng (ABCD).

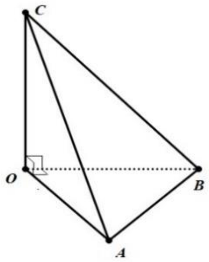
Do đó, $SH \perp (ABCD)$. Vậy H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

Đáp án D.

Câu 34: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

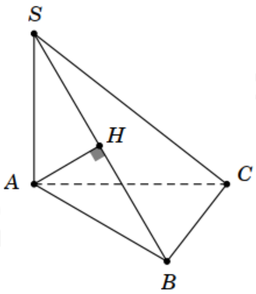
A. $OC \perp (ABC)$. **B.** $OC \perp (ABO)$. **C.** $OB \perp (OAC)$. **D.** $OA \perp (OBC)$.

Phương pháp
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.
Lời giải



Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ và OB và OC cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OBC) nên $OA \perp (OBC)$ nên câu D đúng.
Vì $OC \perp OB, OA \perp OC$ và OB và OA cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OBA) nên $OC \perp (ABO)$ nên câu B đúng.
Vì $OA \perp OB, OB \perp OC$ và OA và OC cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OAC) nên $OB \perp (OAC)$ nên câu C đúng.
Vì $OC \perp OB$ nên tam giác OBC vuông tại O. Do đó, OC không thể vuông góc với CB. Suy ra, OC không vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên câu A sai.
Đáp án A.

Câu 35: Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (SAB) là đường thẳng:
A. SB. **B.** SA. **C.** SB. **D.** AH.
Phương pháp
Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tùy ý trong không gian. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P). Gọi M' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, điểm M' được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P).
Lời giải



Vì $SA \perp (ABC), AC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$
Tam giác ABC vuông tại A nên $AB \perp AC$.
Mà SA và AB cắt nhau tại A và nằm trong mặt phẳng (SAB). Do đó, $AC \perp (SAB)$.
Do đó, A là hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng (SAB).
Suy ra, hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (SAB) là đường thẳng SA.
Đáp án B.

Phần tự luận (3 điểm)
Bài 1. (1 điểm) Cho hàm số: $y = \ln\left[\left(m^2 + 4m - 5\right)x^2 - 2(m-1)x + 2\right]$.

a) Với $m=1$, hãy tìm tập xác định của hàm số trên.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số trên có tập xác định với mọi giá trị thực của x.

Phương pháp

Hàm số $y=\ln u(x)$ xác định khi $u(x)>0$.

Lời giải

a) Với $m=1$ ta có: $y=\ln 2>0$.

Vậy với $m=1$ thì tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;+\infty)$.

b) Hàm số $y=\ln\left[(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2\right]$ xác định với mọi giá trị thực của x khi và chỉ khi $f(x)=(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m^2+4m-5=0\Leftrightarrow(m+5)(m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-5\\m=1\end{array}\right.$

Với $m=1$ ta có: $f(x)=2>0$. Do đó, f(x) xác định với mọi giá trị thực của x. Do đó, $m=1$ thỏa mãn.

Với $m=-5$ ta có: $f(x)=12x+2>0\Leftrightarrow x>\frac{-1}{6}$. Do đó, f(x) không xác định với mọi giá trị thực của x. Do đó, $m=-5$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Với $m^2+4m-5\ne0\Leftrightarrow(m+5)(m-1)\ne0\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne-5\\m\ne1\end{cases}$.

Hàm số $f(x)=(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m-5>0\\\Delta'=(m-1)^2-2(m^2+4m-5)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+5)(m-1)>0\\-m^2-10m+11<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+5)(m-1)>0\\(m+11)(m-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m<-11\\m>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-11\\m>1\end{array}\right.$$

Vậy với $m\in(-\infty;-11)\cup[1;+\infty)$ thì hàm số $y=\ln\left[(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2\right]$ có tập xác định với mọi giá trị thực của x.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

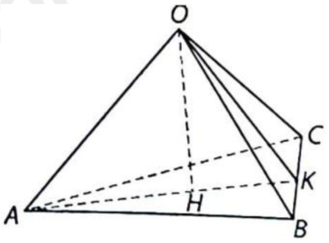
a) H là trực tâm của tam giác ABC. b) $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d\perp(P)$.

+ Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Lời giải



a) Vì $OA\perp OB, OA\perp OC$ và OB và OC cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OBC) nên $OA\perp (OBC)$.

Mà $BC\subset (OBC)\Rightarrow OA\perp BC$

Vì $OH\perp (ABC), BC\subset (ABC)\Rightarrow OH\perp BC$

Ta có: $OH\perp BC, OA\perp BC$, OA và OH cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (OAH).

Do đó, $BC\perp (OAH)$. Mà $AH\subset (OAH)\Rightarrow BC\perp AH$.

Chứng minh tương tự ta có: $CA\perp BH$.

Tam giác ABC có hai đường cao AH và BH cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Gọi K là giao điểm của AH và BC.

Khi đó, $OK\perp BC\left(\text{do } BC\perp (OAH)\right)$, $OA\perp OK\left(\text{do } OA\perp (OBC)\right)$

Suy ra OK là đường cao của tam giác vuông OBC và OH là đường cao của tam giác vuông OAK.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OBC vuông tại O và OAK vuông tại O ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OK^2}$ và $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

Do đó, $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

Bài 3. (0,5 điểm) Cho phương trình $3\log_8\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$?

Phương pháp

Nếu $a>0, a\ne 1$ thì $\log_a u(x)=\log_a v(x)\Leftrightarrow \begin{cases}u(x)>0\\u(x)=v(x)\end{cases}$ (có thể thay $u(x)>0$ bằng $v(x)>0$)

Lời giải

Điều kiện: $x^2-x+1-3m>0 (*)$

$3\log_8\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_2\left(x^2-x+1-3m\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m \Leftrightarrow x^2-(m+2)x+2m=0\,(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+1-3m>0 \\ 2^2-2+1-3m>0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+1>0 \\ 3-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}\,(**)$

Theo giả thiết:

$|x_1-x_2|<15 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<225 \Leftrightarrow (m+2)^2-4.2m<225$

$\Leftrightarrow m^2-4m-221<0 \Leftrightarrow -13<m<17\,(***)$

Từ (**) và (***) ta có: $-13<m<2-\sqrt{3}$.

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-12;-11;...;0\}$. Vậy có 13 giá trị của m thỏa mãn bài toán.