SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HOÁ
ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CẤP THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1: Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x\geq 0, x\neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P>1$.

Câu 2:

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $M(-1;2)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=6\\x-y=-2\end{cases}$

Câu 3:

1. Giải phương trình $x^2-3x+2=0$.

2. Cho phương trình $x^2-2mx-m^2-2=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$.

Câu 4: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm đối xứng với B qua O, đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại D (D khác C).

1. Chứng minh MAOB là tứ giác nội tiếp.

2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và MO. Chứng minh rằng MN^2 = ND.NA.

3. Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2-\frac{AC}{HN}=1$.

Câu 5: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $4x^2+y^2+4z^2\leq 6y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{8}{(x+3)^2}+\frac{16}{(y+4)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+2023$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1 (VD):

Phương pháp:

1. Quy đồng và rút gọn.

2. Giải phương trình P > 1.

Cách giải:

1. Rút gọn biểu thức P

Ta có $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{2+5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}+2-2-5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2x-4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P>1$.

Để $P>1$

$\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}>1\Leftrightarrow 2\sqrt{x}>\sqrt{x}+2$ (do $\sqrt{x}+2$ > 0)

$\Leftrightarrow \sqrt{x}>2$

$\Leftrightarrow x>4$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge 0, x\ne 4$, để P > 1 thì $x>4$

Câu 2 (VD):

Phương pháp:

1. $y=ax+b$ có hệ số góc là a.

2. Sử dụng phương pháp thế hoặc trừ vế.

Cách giải:

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $M(-1;2)$.

Vì (d) có hệ số góc bằng 3 nên suy ra: $a = 3$.

Khi đó phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = 3x + b$

Vì (d) đi qua điểm $M(-1;2)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng (d) ta được:

$$2 = 3.(-1) + b \Leftrightarrow 2 = -3 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Vậy $a = 3;\ b = 5$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y) = (1;3)$.

Câu 3 (NB):

Phương pháp:

1. Bước 1: Tính giá trính của Δ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 2: Xét tập nghiệm của phương trình bằng việc sánh giá Δ với 0

$\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình bậc 2 vô nghiệm

$\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình bậc 2 có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, ta dùng công thức nghiệm sau:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Sử dụng Vi et.

Cách giải:

1. Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Xét phương trình $x^2-3x+2=0$ có $a+b+c=0$ nên ta có phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$.

2. Cho phương trình $x^2-2mx-m^2-2=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 (với $x_1<x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$.

Xét phương trình $x^2-2mx-m^2-2=0$ có $\Delta'=(-m)^2-1.(-m^2-2)=m^2+m^2+2=2m^2+2>0$ với mọi m.

Áp dụng định lí Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-m^2-2 \end{cases}$.   (2)

Nhận thấy $x_1x_2=-m^2-2<0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2$.

$x_2-2|x_1|-3x_1x_2=3m^2+3m+4$
$\Leftrightarrow x_2+2x_1-3x_1x_2=3m^2+3m+4$
$\Leftrightarrow 2x_1+x_2-3(-m^2-2)=3m^2+3m+4$
$\Leftrightarrow 2x_1+x_2+3m^2+6=3m^2+3m+4$
$\Leftrightarrow 2x_1+x_2=3m-2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ 2x_1+x_2=3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=m-2 \\ x_2=2m-m+2=m+2 \end{cases}$

Thay vào $x_1x_2=-m^2-2$ ta được phương trình

$(m-2)(m+2)=-m^2-2$
$\Leftrightarrow m^2-4=-m^2-2$
$\Leftrightarrow 2m^2=2$
$\Leftrightarrow m^2=1$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 (VD):

Cách giải:

1. Chứng minh MAOB là tứ giác nội tiếp.

Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow \angle MAO = \angle MBO = 90^0$.

$\Rightarrow \angle MAO + \angle MBO = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

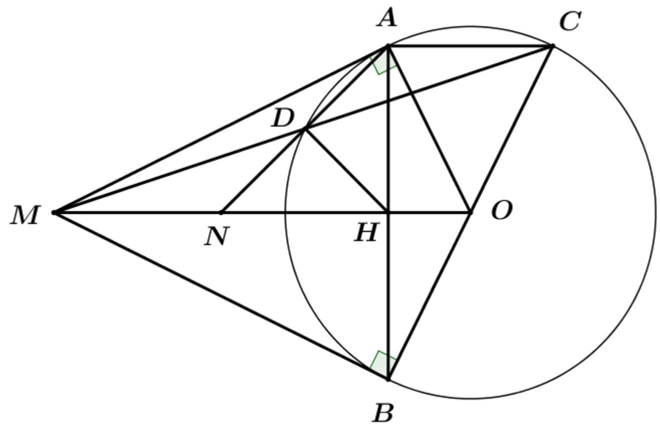
Mà A, B là hai đỉnh đối diện của tứ giác MAOB.

Vậy MAOB là tứ giác nội tiếp (dhnb).

2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và MO. Chứng minh rằng $MN^2 = ND.NA$.

Ta có: $\angle MDN = \angle ADC$ (đối đỉnh), $\angle ADC = \angle ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \angle MDN = \angle ABC$.



Mà $\angle ABC = \angle ABO = \angle AMO = \angle AMN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO).

$\Rightarrow \angle MDN = \angle AMN$.

Xét ΔMND và ΔANM có:

$\angle ANM$ chung

$\angle MDN = \angle AMN$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MND \backsim \Delta ANM$ $(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{NA} = \dfrac{ND}{MN}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow MN^2 = ND.NA$ $(dpcm)$.

3. Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh $\left(\dfrac{HA}{HD}\right)^2 - \dfrac{AC}{HN} = 1$.

Xét ΔMAD và ΔMCA có:

$\angle AMC$ chung

$\angle MAD = \angle MCA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD).

$\Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta MCA$ $(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD$ (1)

Ta có: $OA = OB$ $(= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB.

$MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB.

$\Rightarrow OM$ là trung trực của AB $\Rightarrow OM \perp AB$ tại H.

Xét tam giác OAM vuông tại A có đường cao AH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$MA^2 = MH.MO$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow MC.MD = MH.MO \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$.

Xét ΔMOC và ΔMDH có:

$\angle OMC$ chung

$\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}\left(cmt\right)$

$\Rightarrow \Delta MOC \backsim \Delta MDH\ \left(g.g\right)$

$\Rightarrow \angle MHD = \angle MCO$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle MCO = \angle DCB = \angle DAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DB)

$\Rightarrow \angle MHD = \angle DAB$.

Mà $\angle MHD + \angle DHA = \angle AHM = 90^0$.

$\Rightarrow \angle DAB + \angle DHA = 90^0 \Rightarrow \Delta ADH$ vuông tại D (tam giác có tổng hai góc bằng 90^0).

$\Rightarrow HD \perp AN$ tại D.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ADH có: $HA^2 = AD^2 + HD^2$.

Biến đổi $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1$ ta có:

$\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1 \Leftrightarrow \frac{AD^2 + HD^2}{HD^2} = 1 + \frac{AC}{HN}$

$\Leftrightarrow \frac{AD^2}{HD^2} + 1 = 1 + \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{HD^2} = \frac{AC}{HN}$

Xét tam giác AHN vuông tại H, có đường cao HD ta có: $HD^2 = AD.DN$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \frac{AD^2}{HD^2} = \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{AD.DN} = \frac{AC}{HN} \Rightarrow \frac{AD}{DN} = \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DN}{HN}$.

Xét ΔADC và ΔNDM có:

$\angle ADC = \angle MDN$ (đối đỉnh)

$\angle BAC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp AB$. Lại có
$OM \perp AB\left(cmt\right) \Rightarrow OM // AC$ (từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow \angle DAC = \angle DNM$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta NDM\ \left(g.g\right)$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DN}{NM}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ).

Suy ra $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2-\frac{AC}{HN}=1\Leftrightarrow\frac{DN}{NM}=\frac{DN}{HN}\Leftrightarrow NM=HN$

Do đó ta cần chứng minh $NM=HN$.

Theo ý 2. ta có: $MN^2=ND.NA$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHN đường cao HD ta có: $NH^2=ND.NA$.

Vậy $MN^2=NH^2\Leftrightarrow MN=NH$. Do đó ta có điều phải chứng minh $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2-\frac{AC}{HN}=1$.

Câu 5 (VDC):

Cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{ab}$$

$$ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$$

Khi đó ta có:

$$M=\frac{8}{(x+3)^2}+\frac{16}{(y+4)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+2023$$

$$=\frac{8}{(x+3)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{4}+1\right)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+2023$$

$$\ge\frac{8}{(x+3)^2}+\frac{8}{\left(\frac{y}{4}+1+z+1\right)^2}+2023$$

$$\ge\frac{64}{\left(x+3+\frac{y}{4}+1+z+1\right)^2}+2023$$

$$\ge\frac{64}{\left(x+\frac{y}{4}+z+5\right)^2}+2023$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$4x^2+4\ge 2\sqrt{4x^2.4}=8x$$

$$y^2+16\ge 2\sqrt{y^2.16}=8y$$

$$4z^2+4\ge 2\sqrt{4z^2.4}=8z$$

Suy ra: $8x+8y+8z\le 4x^2+4+y^2+16+4z^2+4=4x^2+y^2+4z^2+24$

Mà: $4x^2+y^2+4z^2\le 6y$

$\Rightarrow 8x+8y+8z\le 6y+24$

$\Leftrightarrow 8x+2y+8z\le 24$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{y}{4}+z\le 3$

$$M\ge \frac{64}{\left(x+\dfrac{y}{4}+z+5\right)^2}+2023$$

$$=\frac{64}{(3+5)^2}+2023=2024$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=z=1;y=4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2024 khi $x=z=1;y=4$.