UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán
Thời gian: 120 phút

Câu 1: Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$ (với $x\ge 0, x\ne 1$)

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2: 1. Giải phương trình $x^2-4x+2\sqrt{3}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\frac{1}{y}=4 \\ \sqrt{x-1}-\frac{1}{y}=-1 \end{cases}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=2mx-m^2-m-2$ (với m là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), xác định m để $x_1y_2+x_2y_1=2m^3+6$.

Câu 4: Trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng công 500 nghì đồng tiền điện. Sang tháng 5 năm 2023, do tăng cường thực hiện việc sử dụng điện an toàn, tiết kiệm và hiệu quả; nhà bác An giảm được 15% tiền điện và nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện; kết quả là cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023. Hỏi trong tháng 4 năm 2023, mỗi hộ gia đình dùng hết bao nhiêu đồng tiền điện?

Câu 5: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm S nằm bên ngoài đường tròn. Ké các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là các tiếp diểm). Một đường thẳng đi qua S (không đi qua tâm O) cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm M và N với M nằm giữa S và N .

1. Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp.

2. Chứng minh $SB^2 = SM$. SN.

3. Cho $SO = R\sqrt{5}$ và $MN = R\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm MN. Tính độ dài đoạn thẳng OE và diện tích tam giác SOM theo R.

4. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $(O;R)$ cắt SA, SB lần lượt tại P, Q. Gọi giao điểm của OQ, OP với AB lần lượt là I và H. Chứng minh ba đường thẳng OM, QH, PI đồng quy.

Câu 6: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1 (TH):

Phương pháp:

Dùng hằng đẳng thức để rút gọn.

Cách giải:

1. Rút gọn biểu thức P.

Với $x \ge 0; x \ne 1$, ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1\right)$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \cdot \left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Với $x \ge 0; x \ne 1$, ta có: $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2-1}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Nếu $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ $\Rightarrow 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ là số vô tỉ $\Rightarrow P \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ Loại.

Nếu $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$:

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}+1 \in \{-1;1\}$.

Mà $\sqrt{x}+1 \ge 1, \forall x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$: Thỏa mãn.

Vậy để P nhận giá trị nguyên thì $x = 0$.

Câu 2 (TH):

Phương pháp:

1. phương trình bậc 2.

2. Sử dụng phương pháp đặt ẩn và hệ phương trình.

Cách giải:

1. Phương trình $x^2-4x+2\sqrt{3}=0$.

Xét phương trình: $x^2-4x+2\sqrt{3}=0$ có $a=1,b'=-2,c=2\sqrt{3}$.

$\Delta'=b'^2-ac=(-2)^2-1.2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2>0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{2+\sqrt{3}-1}{1}=1+\sqrt{3}$

$x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{2-\sqrt{3}+1}{1}=3-\sqrt{3}.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{1+\sqrt{3};3-\sqrt{3}\right\}$.

2. hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{y}=4\\ \sqrt{x-1}-\dfrac{1}{y}=-1\end{cases}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ne 0\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x-1}=a\\ \dfrac{1}{y}=b\end{cases}$. Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}2a+b=4\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=3\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ 1-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$.

$a=1\Rightarrow\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$: Thỏa mãn.

$b=2\Rightarrow\dfrac{1}{y}=2\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$: Thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 3 (VD):

Phương pháp:

1. Thay vào hàm số.

2. Dùng vi - et.

Cách giải:

1. Tìm tọa độ điểm M ***thuộc*** (P) ***biết điểm*** M ***có hoành độ bằng -3 .***

Xét $(P): y=x^2$: Cho $x=-3\Rightarrow y=(-3)^2=9$.

Vậy tọa độ điểm M thỏa mãn là $M\left(-3;9\right)$.

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt parabol $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt. Gọi $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là hai giao điểm của đường thẳng $\left(d\right)$ và parabol $\left(P\right)$, xác định m để $x_1y_2+x_2y_1=2m^3+6$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$:

$x^2=2mx-m^2-m-2\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+m+2=0\left(*\right)$

Ta có: $\Delta'=b'^2-ac=m^2-\left(m^2+m+2\right)=-m-2$.

Để $\left(d\right)$ cắt parabol $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $\left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2m\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m^2+m+2\end{cases}$.

Do $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)\in\left(P\right)$ nên $y_1=x_1^2,y_2=x_2^2$.

Theo đề bài ta có:

$x_1y_2+x_2y_1=2m^3+6\Leftrightarrow x_1x_2^2+x_2x_1^2=2m^3+6\Leftrightarrow x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=2m^3+6$

$\Leftrightarrow\left(m^2+m+2\right)\cdot 2m=2m^3+6\Leftrightarrow 2m^3+2m^2+4m-2m^3-6=0$

$\Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0\Leftrightarrow m^2+2m-3=0$

$\Leftrightarrow m^2+3m-m-3=0\Leftrightarrow m\left(m+3\right)-\left(m+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(m+3\right)\left(m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+3=0\\ m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\left(TM\right)\\ m=1\left(L\right)\end{array}\right.$.

Vậy $m=-3$.

Câu 4 (NB):

Phương pháp:

Lập hệ phương trình.

Cách giải:

Gọi số tiền điện nhà bác An và nhà bác Bình dùng hết trong tháng 4 năm 2023 lần lượt là x,y (nghìn đồng; $0<x,y<500$).

Vì trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiền điện nên ta có phương trình:

$x+y=500\,(1)$

Vì trong tháng 5 năm 2023, nhà bác An giảm được 15% tiền điện, nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện và cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023 nên ta có phương trình:

$15\%x+10\%y=65\#(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=500 \\ 15\%x+10\%y=65 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=500 \\ 0,15x+0,1y=65 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=500 \\ 1,5x+y=650 \end{cases}$

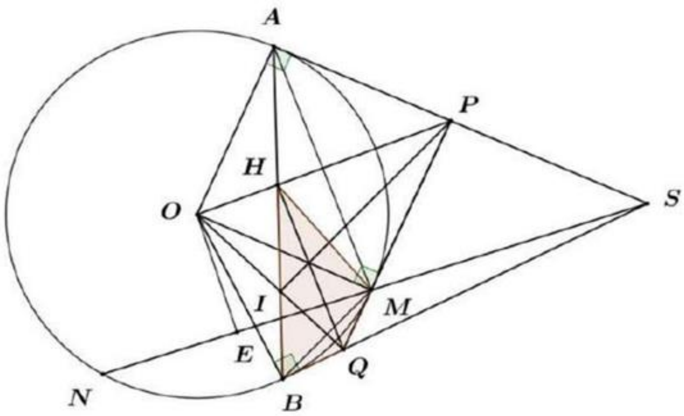
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=500 \\ 0,5x=150 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=500 \\ x=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=200 \end{cases} (tm)$

Vậy trong tháng 4 năm 2023, nhà bác An dùng hết 300 nghìn đồng tiền điện, nhà bác Bình dùng hết 200 nghìn đồng tiền điện.

Câu 5 (VD):

Cách giải:



1. Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp.

Tứ giác $SAOB$ có:

$\angle OAS=\angle OBS=90^\circ$ (Vì SA, SB là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \angle OAS + \angle OBS = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $SAOB$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

2. Chứng minh: $SB^2 = SM.SN$ **.**

Xét ΔSMB và ΔSBN có:

$\angle S$ chung

$\angle SBM = \angle SNB$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta SMB \backsim \Delta SBN\left(g \cdot g\right) \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SB}{SN}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow SB^2 = SM.SN\left(\text{đpcm}\right)$

3. Cho $SO = R\sqrt{5}$ và $MN = R\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của MN. Tính độ dài đoạn thẳng OE và diện tích tam giác SOM theo R.

Do E là trung điểm của $MN \Rightarrow ME = EN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ và $OE \perp MN$ tại E (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \Delta OEM$ vuông tại $E \Rightarrow OE^2 + EM^2 = OM^2 \Leftrightarrow OE^2 + \left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow OE = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: ΔSOE vuông tại E

$\Rightarrow OE^2 + SE^2 = SO^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + SE^2 = (R\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow SE^2 = \dfrac{9R^2}{2} \Leftrightarrow SE = \dfrac{3R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $SE = SM + EM \Leftrightarrow \dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = SM + \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow SM = R\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác SOM là: $\dfrac{1}{2} \cdot OE \cdot SM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} = \dfrac{R^2}{2}$.

4. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $\left(O;R\right)$ cắt SA, SB lần lượt tại P, Q. Gọi giao điểm của OQ, OP với AB lần luột là I và H. Chứng minh ba đường thẳng OM, QH, PI đồng quy.

Vì $OA = OM\left(= R\right)$ nên O thuộc trung trực của AM.

Vì $PA = PM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) => P thuộc trung trực của AM.

$\Rightarrow OP$ là trung trực của AM.

Mà H thuộc OP => $HA = HM$.

Xét ΔHAP và ΔHMP có: $HA = HM\left(\text{cmt}\right), HP$ chung, $PA = PM\left(\text{cmt}\right)$

$\Rightarrow \Delta HAP = \Delta HMP(\text{ c.c.c }) \Rightarrow \angle HMP = \angle HAP$ (2 góc tương ứng).

Mà $SA = SB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ Tam giác SAB cân tại S.

$\Rightarrow \angle HAP = \angle BAS = \angle ABS = \angle HBQ$.

$\Rightarrow \angle HMP = \angle HBQ$.

Mà $\angle HMP + \angle HMQ = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle HBQ + \angle HMQ = 180^\circ$.

Mà 2 đỉnh B, M đối nhau nên $HBQM$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung HM).

Mà $\angle HBM = \angle ABM = \angle AMP$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM).

$\Rightarrow \angle HQM = \angle AMP$. Mà 2 góc này ở vị trí hai góc đồng vị bằng nhau nên $HQ // AM(\text{dhnb})$.

Ta có: OP là trung trực của $AM(\text{cmt}) \Rightarrow OP \perp AM$.

$\Rightarrow OP \perp HQ$ (từ vuông góc đến song song).

$\Rightarrow HQ$ là đường cao của tam giác OPQ.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được PI là đường cao của tam giác OPQ.

Theo giả thiết: $OM \perp PQ \Rightarrow OM$ là đường cao của tam giác OPQ.

Vậy OM, QH, PI là ba đường cao của tam giác OPQ nên chúng đồng quy (đpcm).

Câu 6 (VDC):

Phương pháp:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si.

Cách giải:

Ta có: $c + ab = c(a+b+c) + ab = ca + cb + c^2 + ab = (c+a)(b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{c+ab}} = \dfrac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c}\right)$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{a+bc}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}\right); \dfrac{1}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c}\right)$

Suy ra: $P \le \dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c}\right) + \dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}\right) + \dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc+ca}{a+b} + \dfrac{ab+ca}{b+c} + \dfrac{ab+bc}{c+a}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.