ĐỀ THI HỌC KÌ I – Đề số 6

Môn: Toán học - Lớp 10

Bộ sách Chân trời sáng tạo

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết học kì I của chương trình sách giáo khoa Toán 10 – Chân trời sáng tạo.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm, tự luận Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải tất cả các chương học kì I – chương trình Toán 10.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

I. Trắc nghiệm (7 điểm)

1. A	6. C	11. D	16. A	21. A	26. B	31. D
2.A	7. B	12. C	17. B	22. C	27. B	32. A
3. A	8. C	13. B	18. C	23. D	28. B	33. C
4. A	9. D	14. D	19. C	24. A	29. D	34. A
5. B	10. D	15. D	20. D	25. D	30. C	35. D

Câu 1 (TH):

Phương pháp:

$\sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \ge 0$.

Cách giải:

Hàm số $y = \sqrt{6-3x} - \sqrt{x-1}$ xác định khi $\begin{cases} 6-3x \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \ge 3x \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$

Do đó tập xác định là $D = [1;2]$.

Chọn A.

Câu 2 (TH):

Phương pháp:

Phủ định của $\forall$ là $\exists$, phủ định của $>$ là $\le$.

Cách giải:

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x-2>5$" là "$\exists x \in \mathbb{R}, x-2 \le 5$".

Chọn A.

Câu 3 (TH):

Phương pháp:

Viết tập hợp theo cách liệt kê các phần tử.

Cách giải:

Giải phương trình $x(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Mà $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \{2;3\}$.

Vậy D = {2;3}.

Chọn A.

Câu 4 (TH):

Cách giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Xét $x_1;x_2 \in D$ và $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$

Khi đó với hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2^2.x_1^2}$

Trên $(-\infty;0) \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2^2.x_1^2}<0$ nên hàmsố đồng biến.

Trên $(0;+\infty) \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2^2.x_1^2}>0$ nên hàm số nghịch biến.

Chọn A.

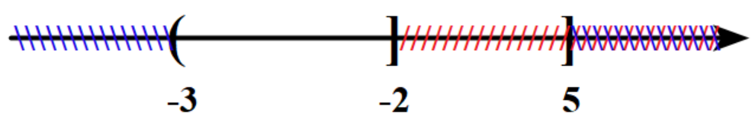
Câu 5 (VD):

Phương pháp:

Thực hiện các phép toán trên tập hợp. Sử dụng trục số.

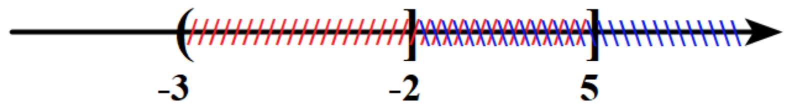
Cách giải:

+) $A \cap B=(-3;-2]$



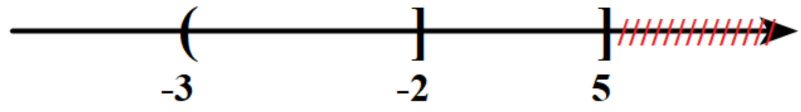
=> A đúng.

+) $A\setminus B=(-\infty;-3]$



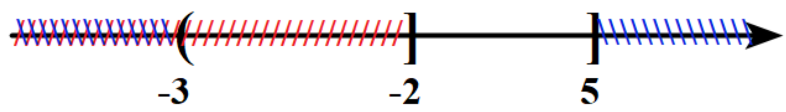
=> B sai.

+) $A\cup B=(-\infty;5]$



=> C đúng.

+) $B\setminus A=(-2;5]$.



=> D đúng.

Chọn B.

Câu 6 (NB):

Phương pháp:

Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B.

Cách giải:

$A_3=\{4;5\}\subset A=\{1;2;3;4;5\}$.

Chọn C.

Câu 7 (TH):

Cách giải:

Hoành độ đỉnh của $(P): y=3x^2-2x+1$ là $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow y=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2.\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn B.

Câu 8 (TH):

Phương pháp:

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$ax+by\le c$ ($ax+by\ge c$, $ax+by<c$, $ax+by>c$)

Trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

Cách giải:

Ta có: $2x^2+1\ge y+2x^2 \Leftrightarrow y-1\le 0$ nên đây là một bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn C.

Câu 9 (NB):

Phương pháp:

Thay các tọa độ điểm vào bất phương trình, điểm nào thỏa mãn bất phương trình thì thuộc miền nghiệm của bất phương trình đó.

Cách giải:

+) Thay tọa độ điểm (5;1) vào bất phương trình ta có: 3.5 + 2.1 < 10 (Vô lí) => (5;1) không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

+) Thay tọa độ điểm (4;2) vào bất phương trình ta có: 3.4 + 2.2 < 10 (Vô lí) => (4;2) không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

+) Thay tọa độ điểm (1;5) vào bất phương trình ta có: 3.1 + 2.5 < 10 (Vô lí) => (1;5) không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

+) Thay tọa độ điểm (1;2) vào bất phương trình ta có: 3.1 + 2.2 < 10 (Đúng) => (1;2) không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Chọn D.

Câu 10 (NB):

Phương pháp:

Sử dụng định lí cosin trong tam giác: $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A.$

Cách giải:

$EF^2=EG^2+FG^2-2EG.FG.\cos G$ là mệnh đề đúng.

Chọn D.

Câu 11 (TH):

Cách giải:

Parabol $(P):y=x^2+mx+n$ nhận $I(2;-1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases}4+2m+n=-1\\ -\dfrac{m}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+n=-5\\ m=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=3\\ m=-4\end{cases}.$$

Vậy $m=-4, n=3$.

Chọn D.

Câu 12 (VD):

Phương pháp:

Tính sinA.

Tính diện tích tam giác ABC: $S=\frac{1}{2}bc.\sin A.$

Sử dụng định lí cosin trong tam giác tính a: $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A.$

Sử dụng công thức tính diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}ah_a$, từ đó tính h_a.

Cách giải:

Ta có:

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\Leftrightarrow \sin^2 A+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \sin^2 A=\frac{16}{25}$

Vì $0^0<A<180^0$ nên sinA > 0 $\Rightarrow \sin A=\frac{4}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}bc.\sin A.=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14.$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A.$

$=7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}$

$=32$

$\Rightarrow a=4\sqrt{2}.$

Lại có: $S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2.14}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Câu 13 (TH):

Cách giải:

Do đồ thị hàm số có đỉnh là $I(2;-1)\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b}{2a}=2\\ f(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}$ (1)

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)\Rightarrow f(0)=3\Leftrightarrow c=3\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \Rightarrow T=26 \\ c=3 \end{cases}$

Chọn B.

Câu 14 (NB):

Phương pháp:

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Cách giải:

$\begin{cases} x-4\ge y \\ 3x+4y<5 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn D.

Câu 15 (NB):

Phương pháp:

Nhớ bảng giá trị lượng giác của các góc thường dùng hoặc sử dụng máy tính cầm tay.

Cách giải:

$T=2+\sin^2 90^0+2\cos^2 60^0-3\tan^2 45^0$

$T=2+1^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-3.1^2$

$T=\frac{1}{2}.$

Chọn D.

Câu 16 (NB):

Phương pháp:

Sử dụng các công thức tính diện tích tam giác: $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=pr=\frac{abc}{4S}=\frac{1}{2}c.h_c$.

Cách giải:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ nên đáp án A sai.

Chọn A.

Câu 17 (NB):

Phương pháp:

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác: $AB^2=BC^2+AC^2-2BC.AC.\cos C$.

Cách giải:

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác ABC:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos C$

$= 1^2 + 3^2 - 2.1.3.\cos 60^0 = 7$

$\Rightarrow AB = \sqrt{7}.$

Chọn B.

Câu 18 (TH):

Cách giải:

Hàm số $y = -x^2 + 2x + 2$ là hàm số bậc hai, có $a = -1 < 0, b = 2$

=> Loại A, D.

Parabol có hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2.(-1)} = 1$ => Loại B

Chọn C.

Câu 19 (NB):

Phương pháp:

Biểu diễn tập hợp trên trục số.

Cách giải:

Hình vẽ đã cho là minh họa cho tập hợp $\left[1;+\infty\right)$.

Chọn C.

Câu 20 (NB):

Phương pháp:

Sử dụng mối liên hệ giá trị lượng giác của hai góc bù nhau: Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau ta có: $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\tan\alpha = -\tan\beta$, $\cot\alpha = -\cot\beta$.

Cách giải:

α và β là hai góc khác nhau và bù nhau nên $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\tan\alpha = -\tan\beta$, $\cot\alpha = -\cot\beta$.

Vậy đẳng thức ở đáp án D sai.

Chọn D.

Câu 21 (TH):

Cách giải:

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, C.

Chọn A.

Câu 22 (VD):

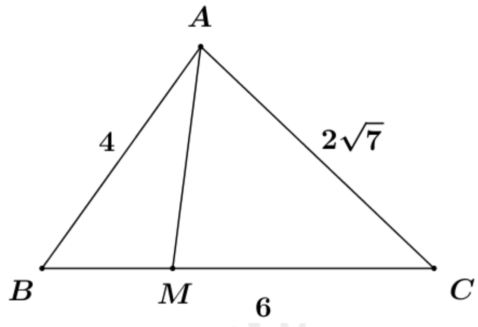
Phương pháp:

Sử dụng hệ quả định lí cosin trong tam giác ABC tính cosB: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC}$.

Tính BM, CM.

Sử dụng định lí cosin trong tam giác ABM tính AM: $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B$.

Cách giải:



Ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC}$$
$$= \frac{4^2 + 6^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6} = \frac{1}{2}$$

Vì MC = 2MB, BC = 6 nên $BM = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{1}{3}.6 = 2.$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABM ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B$$
$$= 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{1}{2} = 12$$
$$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}.$$

Chọn C.

Câu 23 (TH):

Phương pháp:

Tìm phương trình đường thẳng d. Loại đáp án.

Thay tọa độ điểm O(0;0) vào các bất phương trình chưa bị loại ở các đáp án, tiếp tục loại đáp án.

Cách giải:

Đường thẳng d đi qua điểm (0;1) nên loại đáp án B, C.

Ta thấy điểm O(0;0) không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

+ Thay tọa độ điểm O(0;0) vào bất phương trình $2x + y < 1$ ta có: 2.0 + 0 < 1 (Đúng) => Loại.

+ Thay tọa độ điểm O(0;0) vào bất phương trình $2x + y > 1$ ta có: 2.0 + 0 > 1 (Vô lí) => Thỏa mãn.

Chọn D.

Câu 24 (TH):

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Cách giải:

Ta có:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 1+\left(-2\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Vì $0^0 < \alpha < 180^0 \Rightarrow \sin\alpha > 0$. Mà $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$ nên $\cos\alpha < 0$.

Vậy $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn A.

Câu 25 (VD):

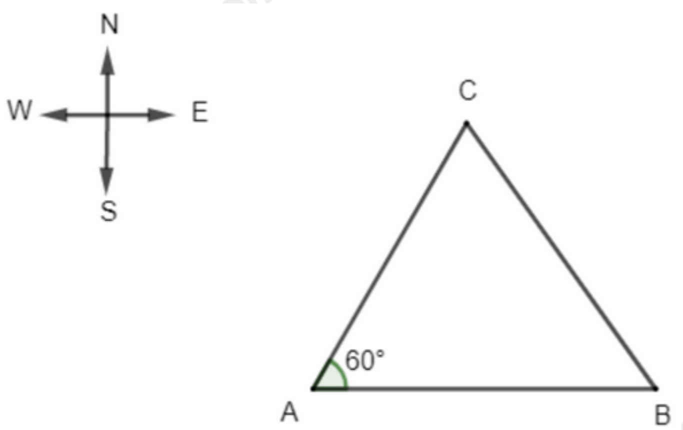
Phương pháp:

Hướng N30^0E là hướng tạo với hướng bắc một góc 30^0 và tạo với hướng đông một góc $90^0 - 30^0 = 60^0$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác.

Cách giải:

Hướng N30^0E là hướng tạo với hướng bắc một góc 30^0 và tạo với hướng đông một góc $90^0 - 30^0 = 60^0$.



A là vị trí cảng.

Ca nô đi theo hướng đông từ A đến B, sau 3 giờ đi được quãng đường AB = 50.3 = 150 (km).

Tàu cá đi theo hướng N30^{0}E từ A đến C, sau 3 giờ đi được quãng đường AC = 40.3 = 120 (km).

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60$$
$$= 150^2 + 120^2 - 2.150.120.\frac{1}{2}$$
$$= 18900$$
$$\Rightarrow BC = 30\sqrt{21} \approx 137,5.$$

Vậy sau 3 giờ hai tàu cách nhau khoảng 137,5km.

Chọn D.

Câu 26:

Cách giải

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $\sqrt{3} = 1,7320508076...$

Làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 1,732.

Chọn B.

Câu 27:

Cách giải

Ta có: $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m} \Rightarrow d = 0,2$

Độ chính xác d có chữ số (khác 0) ở hàng lớn nhất là hàng phần mười, do đó ta làm tròn số gần đúng $h = 347,13$ đến hàng đơn vị, kết quả là 347.

Chọn B.

Câu 28 (TH):

Phương pháp:

Số trung bình cộng $\overline{x} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k}{n}$ trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Cách giải:

Khối lượng trung bình của cả ba nhóm học sinh là: $\overline{x} = \dfrac{20.50 + 15.38 + 25.40}{20 + 15 + 25} = 42,8.$

Chọn B.

Câu 29 (VD):

Phương pháp:

Áp dụng công thức tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Cách giải:

Số trung bình cộng:

$$\overline{x} = \frac{9.1 + 10.1 + 11.3 + 12.5 + 13.8 + 14.13 + 15.19 + 16.24 + 17.14 + 18.10 + 19.2}{100} = \frac{1523}{100} = 15,23 \text{ (điểm)}$$

Phương sai:

$$s^2=\frac{1}{100}\left[1.(9-15,23)^2+1.(10-15,23)^2+\ldots+10.(18-15,23)^2+2.(19-15,23)^2\right]=3,9571(\text{điểm})$$

Độ lệch chuẩn:

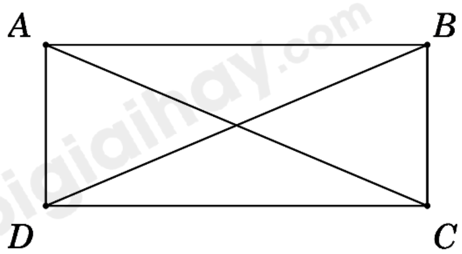
$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{3,9571}\approx 1,9892\ (\text{điểm})$$

Vậy phương sai nhỏ hơn 4, độ lệch chuẩn nhỏ hơn 2.

Chọn D.

Câu 30:

Cách giải:



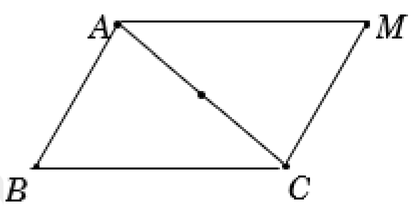
Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD\\\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC\end{cases}$.

Mà $BD=AC\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Chọn C.

Câu 31.

Cách giải:



Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}.$

Do đó D sai.

Chọn D.

Câu 32.

Cách giải:

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ hay $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BC}$

Vậy A đúng.

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ => **B sai.**

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{CD}$ => C sai

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ => **D sai.**

Chọn A.

Câu 33.

Cách giải:

Ta có: $OA=OB=a$

$\Rightarrow \left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=2a+3a=5a$. Vậy B đúng.

Tương tự, ta có $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=11a-6a=5a$. Do đó D đúng.

Lấy C, D sao cho $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OB};$

Dựng hình bình hành OCED. Do $AOB=90^{\circ}$ nên OCED là hình chữ nhật.

Ta có: $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$

$\Rightarrow \left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=OE$

Lại có: $OC=3OA=3a,OD=4OB=4a.$

$\Rightarrow OE=\sqrt{OC^2+CE^2}=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$

Do đó A đúng.

Chọn C

Câu 34:

Cách giải:

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\frac{b^2-c^2}{2}$

Chọn A.

Câu 35:

Cách giải:

Ta có $\begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} \end{cases}$

Khi đó $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} + \vec{0}$

$= -2BA.BD\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = -2.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2$

Chọn D.

II. Tự luận (3 điểm)

Câu 1 (TH):

Cách giải:

a) Ta có:

$= \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) =$

$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$

$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

b)

$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}$

$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC})$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

c) Vì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ đúng với M bất kì.

Chọn $M \equiv A$ ta được:

$AA^2 + AB^2 + AC^2 = 3AG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$

Tương tự,

$M \equiv B \Rightarrow BA^2 + BC^2 = 4\,GB^2 + GA^2 + GC^2$

$M \equiv C \Rightarrow CB^2 + AC^2 = 4GC^2 + GB^2 + GA^2$

Thay $AB = c, AC = b, BC = a$

$\Rightarrow 6\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Câu 2 (VD):

Cách giải:

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có

$CAB=60^\circ, ABC=105^\circ30'$ và $c=70$

Khi đó $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{C}=180^\circ-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=180^\circ-165^\circ30'=14^\circ30'$

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ30'}=\frac{70}{\sin 14^\circ30'}$

Do đó $AC=b=\sin 105^\circ30'\frac{70}{\sin 14^\circ30'}\approx 269,4m$

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH=\frac{AC}{2}=\frac{269,4}{2}=134,7m$

Vậy ngọn núi cao khoảng 135m.

Câu 3 (VD):

Cách giải:

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0;c)\Rightarrow c=-3$.

+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{25}{8}$ tại $x=\frac{1}{4}$ nên đỉnh của đồ thị hàm số là $I\left(\frac{1}{4};-\frac{25}{8}\right)$

Suy ra $\begin{cases}\frac{-b}{2a}=\frac{1}{4}\\ a.\frac{1}{16}+\frac{1}{4}b-3=-\frac{25}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=0\\ a+4b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y=2x^2-x-3$.