ĐỀ THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT – Đề số 5

Môn: Toán học

Chương trình GDPT 2018

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết chương trình Toán THPT.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải chương trình Toán THPT.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)

1) A	**2)** D	**3)** B	**4)** D	**5)** D	**6)** C
7) A	**8)** A	**9)** C	**10)** D	**11)** C	**12)** C

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số f(x) = 5cosx là

A. 5sinx + C

B. 5sin2x + C

C. sin5x + C

D. -5sinx + C

Phương pháp giải:

Áp dụng:

- Quy tắc tính nguyên hàm của hàm số lượng giác: $\int \cos dx = \sin x + C$.

- Tính chất nguyên hàm: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Lời giải chi tiết:

$\int 5\cos xdx = 5\sin x + C$.

Đáp án A.

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ liên tục trên đoạn [a;b] và hai đường thẳng x = a, x = b (a < b) được tính theo công thức

A. $S = \left|\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx\right|$

B. $S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$

C. $S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$

D. $S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ứng dụng tích phân.

Lời giải chi tiết:

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ liên tục trên đoạn [a;b] và hai đường thẳng x = a, x = b (a < b) được tính theo công thức $S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$.

Đáp án D.

Câu 3. Giáo viên chủ nhiệm khảo sát thời gian sử dụng Internet trong một ngày của 50 học sinh thành 7 nhóm (đơn vị: phút) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;60)$	5	5
$[60;120)$	11	16
$[120;180)$	9	25
$[180;240)$	8	33
$[240;300)$	9	42
$[300;360)$	5	47
$[360;420)$	3	50
	$n=50$	

Trung vị của mẫu số liệu bằng

A. 175

B. 180

C. 186

D. 187

Phương pháp giải:

Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m+x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m\in[u_{j-1};u_j)$, $x_{m+1}\in[u_j;u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k=u_j$.

Lời giải chi tiết:

Trung vị M_e của mẫu số liệu gốc là giá trị $\frac{x_{25}+x_{26}}{2}$.

Vì $x_{25} \in [120;180)$ và $x_{26} \in [180;240)$ nên $M_e = 180$.

Đáp án B.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(-4;2;3) và có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;3)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Phương pháp giải:

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ với t là tham số.

Lời giải chi tiết:

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(-4;2;3) và có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1;-1;3)$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Đáp án D.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0; c \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là

A. y = 2

B. y = -1

C. x = 2

D. x = -1

Phương pháp giải:

Đồ thị hàm số y = f(x) có đường tiệm cận đứng $y = x_0$ nếu thõa mãn một trong các điều kiện:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Lời giải chi tiết:

Quan sát bảng biến thiên, thấy $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số y = f(x) có đường tiệm cận đứng là x = -1.

Đáp án D.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3(2-x) \le 1$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Phương pháp giải:

$\log_a b \le x \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b \le a^x \end{cases}$ với a > 1.

Lời giải chi tiết:

$\log_3(2-x) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x \le 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < 2$.

Vậy bất phương trình có ba nghiệm nguyên là x = -1, x = 0 và x =1.

Đáp án C.

Câu 7. Trong không gian Oxyz, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x + 3y + z - 1 = 0$

B. $x^2 + y - z + 3 = 0$

C. $x - y^2 + 3z - 6 = 0$

D. $x + y + z^2 - 7 = 0$

Phương pháp giải:

Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng $ax + by + cz + d = 0$.

Lời giải chi tiết:

Chỉ có $2x + 3y + z - 1 = 0$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Đáp án A.

Câu 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAD)

B. (SAB)

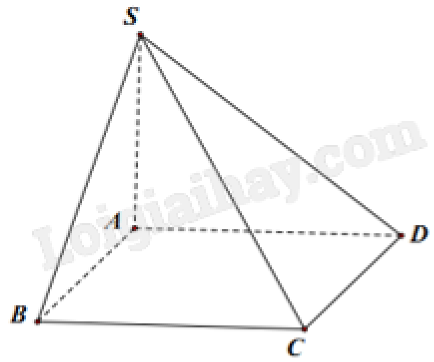
C. (SAC)

D. (SBD)

Phương pháp giải:

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng.

Lời giải chi tiết:



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Đáp án A.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9}$ là

A. [-4;2]

B. $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$

C. [-2;4]

D. $(-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$

Phương pháp giải:

$a^m \ge a^n \Leftrightarrow m \ge n$ với $a > 1$.

Lời giải chi tiết:

$5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$.

Đáp án C.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có d = -2 và $S_8 = 72$. Số hạng đầu tiên u_1 của cấp số cộng là

A. $u_1 = -16$

B. $u_1 = -\frac{1}{16}$

C. $u_1 = \frac{1}{16}$

D. $u_1 = 16$

Phương pháp giải:

$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Lời giải chi tiết:

$72 = 8u_1 + \frac{8(8-1)}{2}(-2) \Leftrightarrow u_1 = 16$.

Đáp án D.

Câu 11. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. a^2

B. $-a^2$

C. $\frac{1}{2}a^2$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Phương pháp giải:

Áp dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

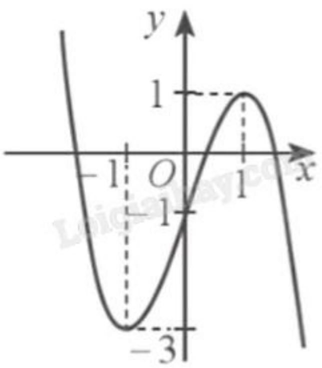
Lời giải chi tiết:

ABCD là tứ diện đều nên tam giác ABC đều. Khi đó AB = AC = a và $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 60^o$.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = a.a.\cos 60^o = \frac{1}{2}a^2$.

Đáp án C.

Câu 12. Cho hàm số y = f(x) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng (-1;1)

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng (-1;1)

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng (-3;1)

Phương pháp giải:

Quan sát đồ thị và nhận xét.

Lời giải chi tiết:

Đồ thị hàm số đi lên từ trái sang trong khoảng (-1;1) nên hàm số đồng biến trên khoảng (-1;1).

Đáp án C.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (4 điểm)

1) ĐSĐS	**2)** ĐĐSĐ	**3)** SĐĐS	**4)** ĐSSĐ

Câu 1. Cho hàm số f(x) = 4sinx + 2x + 1.

a) $f(0)=1;\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi-3$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là f'(x) = -4cosx + 2.

c) Nghiệm của phương trình f'(x) = 0 trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{2\pi}{3}$.

d) Giá trị lớn nhất của f(x) trên đoạn $[0;\pi]$ là $2\pi+1$.

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm, lập bảng biến thiên của hàm số rồi nhận xét.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. $f(0)=4\sin 0+2.0+1=1;\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2.\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=-\pi-3$.

b) Sai. f'(x) = 4cosx + 2.

c) Đúng. $f'(x)=0\Leftrightarrow 4\cos x+2=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Vì ta chỉ xét đoạn $[0;\pi]$ nên:

+) Với $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ ta có:

$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le\frac{2\pi}{3}+k2\pi\le\pi\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}\le k2\pi\le\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le k\le\frac{1}{6}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$. Khi đó $x=\frac{2\pi}{3}+0.2\pi=\frac{2\pi}{3}$.

+) Với $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ ta có:

$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\le\pi\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le k2\pi\le\frac{5\pi}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le k\le\frac{5}{6}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên không có giá trị k nào thỏa mãn.

Vậy trên đoạn $[0;\pi]$, $f'(x) = 0$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = \frac{2\pi}{3}$.

d) Sai. Xét hàm số f(x) trên $[0;\pi]$.

$$f(0)=1;\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+1;\ f(\pi)=2\pi+1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của f(x) trên đoạn $[0;\pi]$ là $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+1$.

Câu 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 240 m, tốc độ của ô tô là 28,8 km/h. Bốn giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v = at + b$ (m/s) với $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 16 giây và duy trì sự tăng tốc trong 30 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 208 m.

b) Giá trị của b là 8.

c) Quãng đường S(t) (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 30)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{30} v(t)dt$.

d) Sau 30 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Phương pháp giải:

Ứng dụng tích phân để giải bài toán chuyển động. Áp dụng công thức $S(t) = \int_0^{t} v(t)dt$.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Tốc độ ban đầu của ô tô là $\frac{28,8}{3,6} = 8$ m/s.

Quãng đường ô tô đi được trong 4 giây đầu tiên là 4.8 = 32 m.

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 320 – 32 = 208 m.

b) Đúng. Thời điểm bắt đầu tăng tốc ta có $v(0) = 8 \Leftrightarrow a.0 + b = 8 \Leftrightarrow b = 8$.

c) Sai. Quãng đường S(t) (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 30)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{t} v(t)dt$.

d) Đúng. Ta có v(t) = at + 8 (m/s).

Vì xe nhập làn sau 16 giây kể từ lúc tăng tốc nên ta có:

$$208 = \int_0^{16}(at+8)dt \Leftrightarrow 208 = a\frac{t^2}{2} + 8t\Big|_0^{16} \Leftrightarrow 208 = a\frac{16^2}{2} + 8.16 \Leftrightarrow a = \frac{5}{8}.$$

Suy ra $v(t) = \frac{5}{8}t + 8$ (m/s).

Tốc độ của ô tô sau 30 giây là $v(30)=\frac{5}{8}.30+8=\frac{107}{4}$ (m/s) = 96,3 km/h.

Câu 3. Truờng Hạnh Phúc có 1000 học sinh thì có 200 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi đàn guitar. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc cũng biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường.

a) Xác suất chọn được học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là 0,9.

b) Xác suất chọn được học sinh vừa tham gia câu lạc bộ âm nhạc vừa biết chơi đàn ghi ta là 0,17.

c) Xác suất chọn được học sinh biết chơi đàn ghi ta là 0,25.

d) Giả sử học sinh đó biết chơi đàn guitar. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc là 0,7.

Phương pháp giải:

a) Áp dụng quy tắc tính xác suất của biến cố đối.

b) Áp dụng quy tắc nhân xác suất.

c) Áp dụng công thức xác suất toàn phần.

d) Áp dụng công thức Bayes.

Lời giải chi tiết:

A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc". $P(A)=\frac{200}{1000}=0,2$.

$\overline{A}$: "Chọn được học sinh không thuộc câu lạc bộ âm nhạc". $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,2=0,8$.

B: "Chọn được học sinh sinh biết chơi đàn guitar".

$\overline{B}$: "Chọn được học sinh sinh không biết chơi đàn guitar".

a) Sai. $P(\overline{A})=0,8$.

b) Đúng. Có 85% số học sinh trong câu lạc bộ âm nhạc biết chơi guitar nên P(B|A) = 0,85.

Có 10% số học sinh không trong câu lạc bộ âm nhạc biết chơi guitar nên $P(B\,|\,\overline{A})=0,1$.

Xác suất chọn được học sinh vừa tham gia câu lạc bộ âm nhạc vừa biết chơi đàn ghi ta là P(AB).

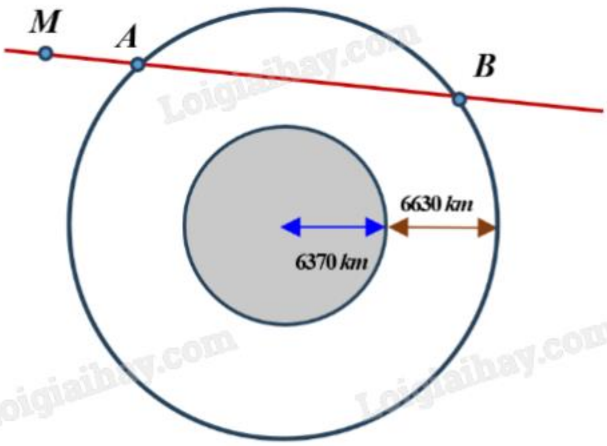
Áp dụng công thức nhân xác suất: $P(AB)=P(A).P(B\,|\,A)=0,2.0,85=0,17$.

c) Đúng. Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})=0,2.0,85+0,8.0,1=0,25$.

d) Sai. Áp dụng công thức Bayes: $P(A\,|\,B)=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(B)}=\frac{0,2.0,85}{0,25}=0,68$.

Câu 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6630 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6370 km. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm M(-12;29;10) theo phương song song với giá của vecto $\vec{u}(-12;17;5)$.



a) Trong hệ trục tọa độ đã cho thiên thạch di chuyển trên đường thẳng có phương tham số $\begin{cases} x=-12-12t \\ y=29+17t \\ z=10+5t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm A(12;-5;0).

c) Vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là B(0;12;5).

d) Thiên thạch trên không thể va vào trái đất.

Phương pháp giải:

a) Đường thẳng có vecto chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ và đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ $d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$.

b, c, d) Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm:

$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Thiên thạch di chuyển trên đường thẳng có vecto chỉ phương $\vec{u}(-12;17;5)$ và đi qua điểm M(-12;29;10) nên phương trình đường thẳng đó là $\begin{cases} x=-12-12t \\ y=29+17t \\ z=10+5t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b) Sai. Giả sử vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm A.

Vì A thuộc đường thẳng thiên thạch di chuyển nên $A(-12-12t;29+17t;10+5t)$.

Ngoài thực tế khoảng cách từ tâm trái đất đến vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 6370 + 6630 = 13000 km ứng với 13 đơn vị trên hệ trục tọa độ.

Do đó $OA=13\Leftrightarrow OA^2=169$

$\Leftrightarrow(-12-12t)^2+(29+17t)^2+(10+5t)^2=169$

$\Leftrightarrow 144+288t+114t^2+841+986t+289t^2+100+100t+25t^2=169$

$\Leftrightarrow 458t^2+1374t+916=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$.

Với t = -1, ta có $A_1(0;12;5) \Rightarrow MA_1=\sqrt{(-12)^2+17^2+5^2}=\sqrt{658}$.

Với t = 2, ta có $A_2(12;-5;0) \Rightarrow MA_2=\sqrt{(-24)^2+34^2+10^2}=2\sqrt{458}$.

Do $MA_1 < MA_2$ nên vị trí đầu tiên là $A \equiv A_1(0;12;5)$.

c) Sai. Từ ý b), ta có vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là $B \equiv A_2(12;-5;0)$.

d) Đúng. Ta có $AB=\sqrt{12^2+17^2+5^2}=\sqrt{458}$.

Khoảng cách ngắn nhất từ tâm trái đất đến thiên thạch là $\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{13^2-\frac{458}{4}}=\sqrt{\frac{218}{2}}\approx 7,38$.

Khi đó khoảng cách từ thiên thạch đến tâm trái đất khoảng 7380 km lớn hơn bán kính trái đất là 6370 km nên không thể va vào trái đất.

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (3 điểm)

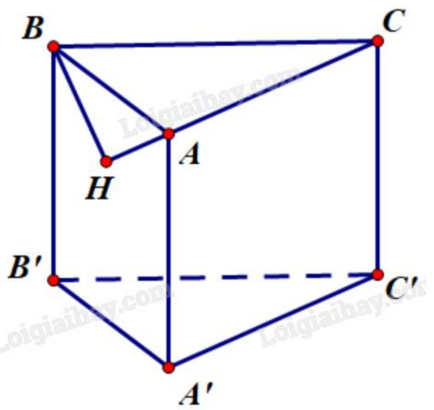
1) 1	**2)** 100	**3)** 45	**4)** 11,4	**5)** 25	**6)** 13

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ có AB = 2 cm, AC = 6 cm, $BAC=150^o$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB’ và AC bằng bao nhiêu (đơn vị: cm)?

Phương pháp giải:

Tìm đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng và tính độ dài đoạn vuông góc chung đó.

Lời giải chi tiết:



Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $BH \perp AC$, $H \in AC$.

Vì ABC.A’B’C’ là hình lăng trụ đứng nên $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp BH$.

Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp BB' \\ B \in BB' \\ H \in AC \end{cases}$ nên BH là đoạn vuông góc chung đồng thời là khoảng cách giữa BB' và AC.

Có $BAH = 180^o - BAC = 180^o - 150^o = 30^o$.

Xét tam giác BHA vuông tại H: $\sin BAH = \dfrac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB.\sin BAH = 2.\sin 30^o = 1$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC bằng 1 cm.

Đáp án: 1.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Trên đường thẳng a lấy bốn điểm phân biệt. Trên mặt phẳng (P) lấy năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có đường thẳng nào đi qua hai điểm trong năm điểm song song với a. Có bao nhiêu hình tứ diện có đỉnh từ 9 điểm đã lấy từ đường thẳng a và mặt phẳng (P)?

Phương pháp giải:

Kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Lời giải chi tiết:

- TH1: Tứ diện có 1 đỉnh thuộc đường thẳng a.

Số cách chọn 1 đỉnh trong 4 điểm thuộc đường thẳng a: 4 cách.

Số cách chọn 3 đỉnh còn lại trong 5 điểm từ mặt phẳng (P): $C_5^3 = 10$ cách.

Suy ra có 4.10 = 40 hình tứ diện có thể lập được.

- TH2: Tứ diện có 2 đỉnh thuộc đường thẳng a.

Số cách chọn 2 đỉnh trong 4 điểm thuộc đường thẳng a: $C_4^2 = 6$ cách.

Số cách chọn 2 đỉnh còn lại trong 5 điểm từ mặt phẳng (P): $C_5^2 = 10$ cách.

Suy ra có 6.10 = 60 hình tứ diện có thể lập được.

=> Kết hợp cả 2 trường hợp, ta có 40 + 60 = 100 hình tứ diện có thể lập được.

Đáp án: 100.

Câu 3. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 40 km và về phía Nam 60 km, đồng thời cách mặt đất 3 km. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 90 km và về phía Tây 50 km, đồng thời cách mặt đất 6 km. Chiếc máy bay thứ ba đang trong quá trình bay thì đột ngột mất tín hiệu, biết rằng lần cuối (trước khi mất tín hiệu) máy bay thứ nhất xác định được khoảng cách giữa máy bay thứ nhất và máy bay thứ ba là $2\sqrt{3401}$ km và máy bay thứ ba nằm giữa máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng. Em hãy xác định khoảng cách từ vị trí xuất phát đến lúc máy bay số ba mất tín hiệu (đơn vị: km).

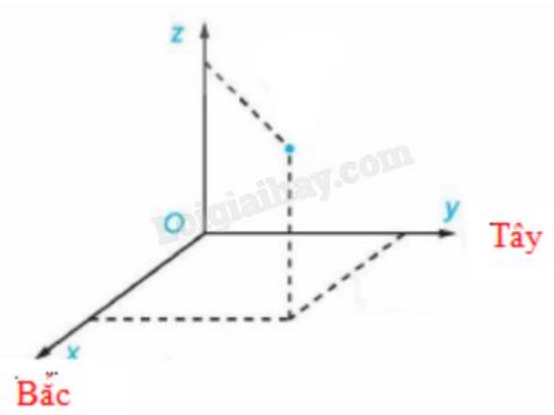
Phương pháp giải:

Chọn hệ trục tọa độ ở vị trí phù hợp.

Vì ba máy bay thẳng hàng nên ta áp dụng điều kiện của vecto cùng phương để giải bài toán.

Lời giải chi tiết:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz , với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo km (như hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ A(-60;-40;3).

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ B(90;50;6).

Gọi tọa độ của máy bay thứ ba lúc mất tín hiệu là C(a;b;c).

Do ba máy bay thẳng hàng và C nằm giữa A, B nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Suy ra $\frac{a+60}{150}=\frac{b+40}{90}=\frac{c-3}{3}=t>0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+60}{150}=\frac{b+40}{90} \\ \frac{b+40}{90}=\frac{c-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+60=\frac{5}{3}(b+40) \\ c-3=\frac{b+40}{30} \end{cases}$.

Ta có $AC=\sqrt{(a+60)^2+(b+40)^2+(c-3)^2}=2\sqrt{3401}$

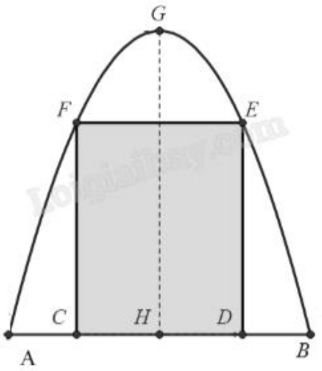
$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{5}{3}(b+40)\right)^2+(b+40)^2+\left(\frac{b+40}{30}\right)^2}=2\sqrt{3401} \Leftrightarrow \frac{3401}{900}(b+40)^2=13604$

$\Leftrightarrow b+40=60 \Leftrightarrow b=20 \Rightarrow \begin{cases} a=40 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow C(40;20;5)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí xuất phát đến máy bay số ba là: $\sqrt{40^2+20^2+5^2}=45$ km.

Đáp án: 45.

Câu 4. Một cái cổng hình parabol như hình vẽ sau. Chiều cao GH = 4 m, chiều rộng AB = 4 m, AC = BD = 0,9 m. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật CDEF tô đậm có giá trị là 1200000 đồng/ m^3, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2. Hỏi tổng số tiền làm cổng parabol như trên (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị: triệu đồng) bằng bao nhiêu?

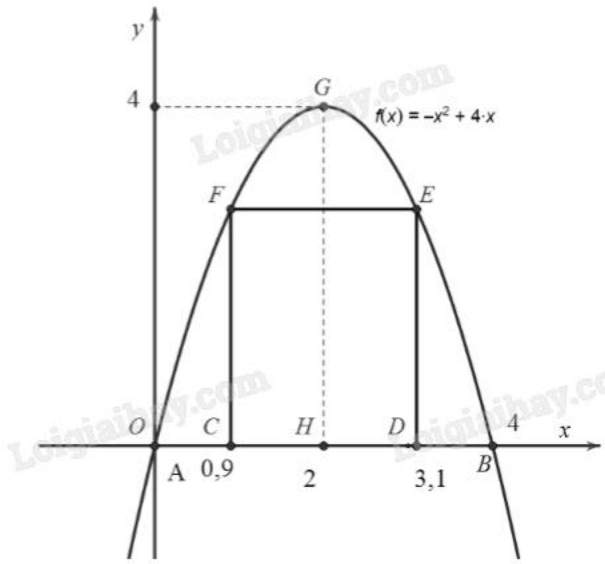


Phương pháp giải:

Chọn hệ trục tọa độ phù hợp, từ đó tìm ra hàm số có đồ thị giới hạn phần diện tích cần tìm. Tính diện tích bằng cách sử dụng tích phân.

Lời giải chi tiết:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Giả sử parabol (P) có phương trình là $y = ax^2 + bx + c \;\; (a \ne 0)$.

(P) có đỉnh G(2;4) và đi qua điểm O(0;0) nên ta có:

$$\begin{cases} 0 = a.0^2 + b.0 + c \\ 4 = a.2^2 + b.2 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = b \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy (P): $y = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int\limits_0^4 \left| -x^2 + 4x \right| dx = \left(-\dfrac{x^2}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \dfrac{32}{3} \;\left(m^2 \right)$.

Mặt khác, chiều cao $CF = DF = f(4 - 0,9) = 2,79$ (m); CD = 4 – AC – BD = 4 – 0,9 – 0,9 = 2,2 (m).

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.EF = 2,2.2,79 = 6,138\ \left(m^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6,138 = \dfrac{6793}{1500}\ \left(m^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \dfrac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng $\approx 11,4$ triệu đồng.

Đáp án: 11,4.

Câu 5. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị: gam/lít) là một hàm f(t). Xác định hàm số f(t), $t \in [0;+\infty)$. Nồng độ muối tối đa có trong bể bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Xác định hàm số f(t) rồi tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)$.

Lời giải chi tiết:

Sau t phút khối lượng muối trong bể là 25.20t = 500t (gam).

Thể tích nước trong bể sau t phút là 6000 + 20t (lít).

Khi đó $f(t) = \dfrac{500t}{6000+20t} = \dfrac{25t}{3000+t}$ (gam/lít), $t \in [0;+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{25t}{3000+t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{25}{\frac{3000}{t}+1} = 25.$$

Vậy nồng độ muối tối đa trong bể là 25 (gam/lít).

Đáp án: 25.

Câu 6. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng $\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị a + b bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức xác suất toàn phần.

Lời giải chi tiết:

A : "Bạn An lấy được bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên". $P(A) = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$.

$\overline{A}$: "Bạn An lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội". $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$.

B: "Bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội".

Nếu bạn An chọn được một bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên thì sau đó còn 35 bộ câu hỏi, trong đó có 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Suy ra $P(B\,|\,A)=\frac{16}{35}$.

Nếu bạn An chọn được một bộ câu hỏi về chủ đề xã hội thì sau đó còn 35 bộ câu hỏi, trong đó có 15 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Suy ra $P(B\,|\,\bar{A})=\frac{15}{35}$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội là:

$$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\bar{A}).P(B\,|\,\bar{A})=\frac{5}{9}.\frac{16}{35}+\frac{4}{9}.\frac{15}{35}=\frac{4}{9}.$$

Vậy a + b = 4 + 9 = 13.

Đáp án: 13.