ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ II – Đề số 1

Môn: Toán học - Lớp 12

Chương trình GDPT 2018

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết giữa học kì II của chương trình sách giáo khoa Toán 12.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải tất cả các chương giữa học kì II – chương trình Toán 12.

Phần I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số F(x) = lnx là nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

B. $f(x)=-\frac{1}{x}$

C. $f(x)=\frac{1}{x}$

D. $f(x)=-\frac{1}{x^2}$

Câu 2. Hàm số $F(x)=2x^9+1945$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=18x^8$

B. $f(x)=18x^8+1945$

C. $f(x)=18x^8+C$

D. $f(x)=\frac{x^{10}}{5}+1945x$

Câu 3. Cho $\int_2^3 f(x)dx=1$ và $\int_2^3 g(x)dx=4$. Khi đó $\int_2^3[f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 5

B. 3

C. -3

D. 4

Câu 4. Cho F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4+\frac{1}{x^3}$ thỏa mãn F(1) = 0. Tìm F(x).

A. $F(x)=x^5-\dfrac{3}{2x^2}+\dfrac{1}{2}$

B. $F(x)=x^5-\dfrac{3}{2x^2}+2$

C. $F(x)=x^5-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}$

D. $F(x)=x^5+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$

Câu 5. Tính $\int\limits_0^2 \left(6x^2-2x\right)dx$ được kết quả bằng

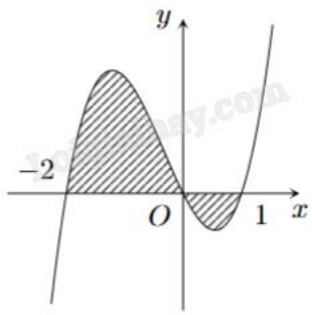
A. 11

B. 12

C. 8

D. 6

Câu 6. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số y = f(x). Gọi S là diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình. Chọn khẳng định đúng.



A. $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$

B. $S=\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx-\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$

C. $S=\int\limits_{0}^{-2} f(x)dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$

D. $S=\int\limits_{-2}^{1} f(x)dx$

Câu 7. Trong không gian Oxyz , vecto chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ là

A. $\vec{u}=(2;3;1)$

B. $\vec{u}=(1;3;1)$

C. $\vec{u}=(3;2;1)$

D. $\vec{u}=(2;3;-1)$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

A. x + 20 = 0

B. x – 2019 = 0

C. y + 5 = 0

D. 2x + 5y – 8z = 0

Câu 9. Trong không gian Oxyz , xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$.

A. I(1;4;-2), R = 3

B. (-1;-4;2), R = 3

C. (1;4;-2), R = 9

D. I(-1;-4;2), R = 9

Câu 10. Góc giữa hai mặt phẳng (P): x + 2y + z – 1 = 0 và (Q): -x + y + 2z + 2 = 0 bằng

A. 30^o

B. 45^o

C. 60^o

D. 90^o

Câu 11. Cho điểm A(4;0;1) và B(-2;2;3). Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có một vecto pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(3;-1;-1)$

B. $\vec{n}=(2;2;2)$

C. $\vec{n}=(1;1;2)$

D. $\vec{n}=(6;2;2)$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) tương ứng có phương trình là 2x + 6y – 4z + 8 = 0, 5x + 15y – 10z + 20 = 0 và 6x + 18y – 12z – 24 = 0. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) // (Q)

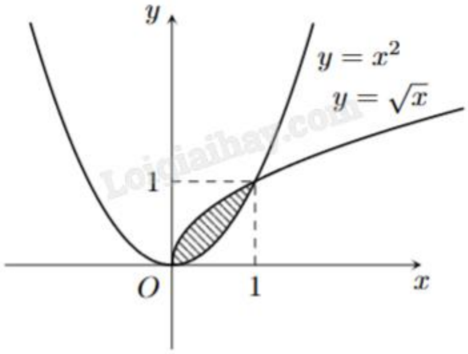
B. (P) cắt (Q)

C. (Q) cắt (R)

D. (R) // (P)

Phần II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu 1, câu 2. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình phẳng được tô trong hình bên.



a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.

c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\int_0^1\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$.

d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2$; (C): $y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $3x - my + 1 = 0$ và (Q): $5y + 12z + 3 = 0$.

a) Tồn tại giá trị m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi m = 0.

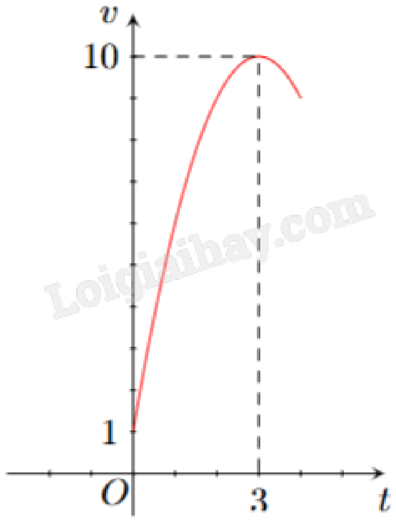
c) Với m = 4 thì góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) gần bằng $42,4^\circ$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° khi và chỉ khi $m = \pm\frac{39}{\sqrt{407}}$.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

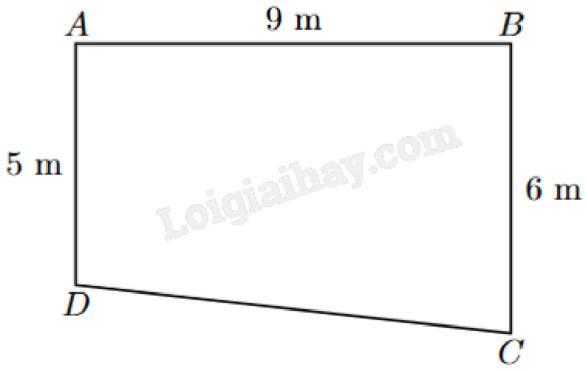
Câu 1. Tại một lễ hội dân gian hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $Q(t) = 8t^3 - 144t^2 + 576t$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 14)$, Q'(t) tính bằng khách/giờ. Sau 1 giờ đã có 300 người có mặt. Hỏi số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 14 giờ là bao nhiêu?

Câu 2. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh I(3;10) và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km).



Câu 3. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (Oyz) là mặt phẳng nằm ngang. Một đường ống nước thẳng đi qua hai điểm A(-1;1;2), B(2;1;3). Hỏi đường ống nước nói trên nghiêng bao nhiêu độ so với mặt phẳng nằm ngang (kết quả làm tròn đến độ)?

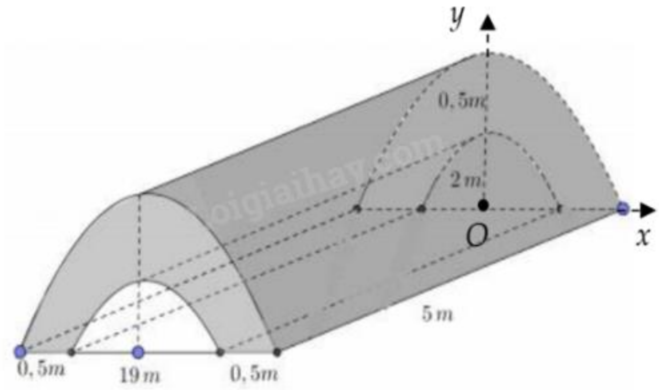
Câu 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang ABCD vuông tại A và B với độ dài AB = 9 m, AD = 5 m và BC = 6 m như hình vẽ. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu cm so với độ cao ở A (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Phần IV: Tự luận. Thí sinh trình bày lời giải từ câu 1 đến câu 3.

Câu 1. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $J=\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Câu 2. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một đoạn đường hầm bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích (m^3) khối bê tông để đổ đủ đoạn đường hầm, biết đường cong trong hình vẽ là các đường parabol.



Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1;1;1), B(−1;2;0), C(3;−1;2) và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$.

-------- Hết --------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)

1) C	**2)** A	**3)** A	**4)** C	**5)** B	**6)** B
7) A	**8)** D	**9)** A	**10)** C	**11)** A	**12)** D

Câu 1. Hàm số F(x) = lnx là nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

B. $f(x)=-\frac{1}{x}$

C. $f(x)=\frac{1}{x}$

D. $f(x)=-\frac{1}{x^2}$

Phương pháp giải:

F(x) là nguyên hàm của f(x) nếu F’(x) = f(x).

Lời giải chi tiết:

Ta có $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ nên F(x) là nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x}$.

Đáp án C.

Câu 2. Hàm số $F(x)=2x^9+1945$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=18x^8$

B. $f(x)=18x^8+1945$

C. $f(x)=18x^8+C$

D. $f(x)=\frac{x^{10}}{5}+1945x$

Phương pháp giải:

F(x) là nguyên hàm của f(x) nếu F’(x) = f(x).

Lời giải chi tiết:

Ta có $F'(x)=\left(2x^9+1945\right)'=18x^8$ nên F(x) là nguyên hàm của $f(x)=18x^8$.

Đáp án A.

Câu 3. Cho $\int_2^3 f(x)dx=1$ và $\int_2^3 g(x)dx=4$. Khi đó $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 5

B. 3

C. -3

D. 4

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của tích phân $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Lời giải chi tiết:

$\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_2^3 g(x)dx = 1+4=5$.

Đáp án A.

Câu 4. Cho F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4+\frac{1}{x^3}$ thỏa mãn F(1) = 0. Tìm F(x).

A. $F(x)=x^5-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2}$

B. $F(x)=x^5-\frac{3}{2x^2}+2$

C. $F(x)=x^5-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$

D. $F(x)=x^5+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lũy thừa $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Lời giải chi tiết:

$F(x)=\int f(x)dx = \int\left(5x^4+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int\left(5x^4+x^{-3}\right)dx = 5.\frac{x^{4+1}}{4+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C$

$=5.\frac{x^5}{5}+\frac{x^{-2}}{-2}+C = x^5-\frac{1}{2x^2}+C$.

$F(1)=0 \Leftrightarrow 1^5-\frac{1}{2.1^2}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=x^5-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Câu 5. Tính $\int_0^2 \left(6x^2-2x\right)dx$ được kết quả bằng

A. 11

B. 12

C. 8

D. 6

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lũy thừa $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

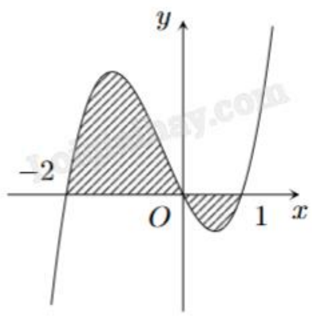
Áp dụng tính chất của tích phân $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Lời giải chi tiết:

$\int_0^2 (6x^2 - 2x)dx = \left(6.\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = (2x^3 - x^2)\Big|_0^2 = 2.2^3 - 2^2 = 12$.

Đáp án B.

Câu 6. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số y = f(x). Gọi S là diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình. Chọn khẳng định đúng.



A. $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

B. $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

C. $S = \int_{0}^{-2} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

D. $S = \int_{-2}^{1} f(x)dx$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), y = g(x) liên tục trên [a;b] và hai đường thẳng x = a, x = b được tính bằng công thức $S\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Lời giải chi tiết:

Quan sát hình vẽ, phần tô đậm được giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x) và trục hoành y = 0. Trên [-2;0] ta thấy $f(x) \geq 0$ và trên [0;1] ta thấy $f(x) \leq 0$.

Diện tích hình phẳng được tô đậm là $S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-0\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Đáp án B.

Câu 7. Trong không gian Oxyz , vecto chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3t\\z=1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ là

A. $\vec{u}=(2;3;1)$

B. $\vec{u}=(1;3;1)$

C. $\vec{u}=(3;2;1)$

D. $\vec{u}=(2;3;-1)$

Phương pháp giải:

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(2;3;1)$ làm một vecto chỉ phương.

Lời giải chi tiết:

Vecto chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3t\\z=1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ là $\vec{u}=(2;3;1)$.

Đáp án A.

Câu 8. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

A. x + 20 = 0

B. x – 2019 = 0

C. y + 5 = 0

D. 2x + 5y – 8z = 0

Phương pháp giải:

Thay tọa độ O(0;0;0) vào từng phương trình mặt phẳng. Nếu thỏa mãn phương trình thì mặt phẳng đó đi qua gốc tọa độ.

Lời giải chi tiết:

Ta thấy 2.0 + 5.0 – 8.0 = 0 nên O(0;0;0) thuộc mặt phẳng 2x + 5y – 8z = 0.

Đáp án D.

Câu 9. Trong không gian Oxyz , xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$.

A. I(1;4;-2), R = 3

B. (-1;-4;2), R = 3

C. (1;4;-2), R = 9

D. I(-1;-4;2), R = 9

Phương pháp giải:

Đường tròn tâm I(a;b;c), bán kính R có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2+(z+c)^2=R^2$.

Lời giải chi tiết:

Đường tròn $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I(1;4;-2) và bán kính R = 3.

Đáp án A.

Câu 10. Góc giữa hai mặt phẳng (P): x + 2y + z – 1 = 0 và (Q): -x + y + 2z + 2 = 0 bằng

A. 30^o

B. 45^o

C. 60^o

D. 90^o

Phương pháp giải:

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C),\vec{n}'=(A';B';C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q), kí hiệu là ((P), (Q)) được tính theo công thức:

$$\cos((P),(Q))=\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Lời giải chi tiết:

$$\cos((P),(Q))=\frac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow((P),(Q))=60^o.$$

Đáp án C.

Câu 11. Cho điểm A(4;0;1) và B(-2;2;3). Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có một vecto pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(3;-1;-1)$

B. $\vec{n}=(2;2;2)$

C. $\vec{n}=(1;1;2)$

D. $\vec{n}=(6;2;2)$

Phương pháp giải:

Mặt phẳng trung trực của AB vuông góc với đường thẳng AB nên nhận $\overrightarrow{AB}$ làm một vecto pháp tuyến.

Lời giải chi tiết:

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nhận một vecto cùng phương với

$\overrightarrow{AB}=(-2-4;2-0;3-1)=(-6;2;2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có $\vec{n} = (3;-1;-1) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của AB.

Đáp án A.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) tương ứng có phương trình là $2x + 6y - 4z + 8 = 0$, $5x + 15y - 10z + 20 = 0$ và $6x + 18y - 12z - 24 = 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) // (Q)

B. (P) cắt (Q)

C. (Q) cắt (R)

D. (R) // (P)

Phương pháp giải:

Xét tỉ lệ các hệ số.

Lời giải chi tiết:

Các vecto pháp tuyến tương ứng với ba mặt phẳng (P), (Q), (R) là $\overrightarrow{n_P} = (2;6;-4)$, $\overrightarrow{n_Q} = (5;15;-10)$ và $\overrightarrow{n_R} = (6;18;-12)$.

Mà $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{-10}{-4} = \frac{20}{8}$ nên (P) trùng (Q).

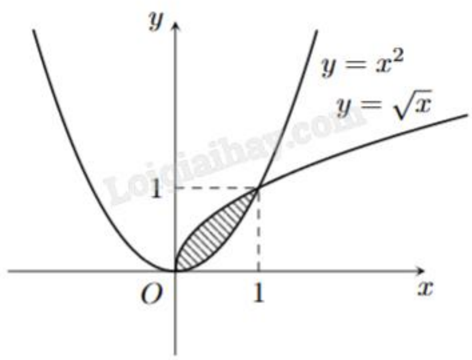
Lại có $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{-12}{-4} \neq \frac{-24}{8}$ nên (P) // (R).

Đáp án D.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (2 điểm)

1) ĐĐSĐ	**2)** SĐSS

Câu 1. Cho hình phẳng được tô trong hình bên.



a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.

c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$.

d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2$; (C): $y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Phương pháp giải:

Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số liên tục trên [a;b] y = f(x), y = g(x), đường thẳng x = a, x = b.

a) Quan sát đồ thị và nhận xét.

b) Áp dụng công thức tính diện tích của hình phẳng $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

c) Áp dụng công thức tính thể tích vật thể quay quanh trục Ox $V = \pi\int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$.

d) Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số liên tục trên [a;b] x = f(y), x = g(y), đường thẳng y = a, y = b.

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể quay quanh trục Oy $V = \pi\int_a^b |f^2(y) - g^2(y)|dx$.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

b) Đúng. Quan sát khoảng (0;1), thấy đồ thị $y = \sqrt{x}$ nằm phía trên đồ thị $y = x^2$.

Do đó, trong khoảng (0;1) ta có $\sqrt{x} > x^2$.

Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là:

$$S = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}|dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) Sai. Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là:

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left|\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right|dx = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1 \left[x - x^4\right]dx.$$

d) Đúng. Vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $x = \sqrt{y}$ và $x = y^2$ quanh trục Oy.

Quan sát đồ thị, ta thấy trong khoảng giá trị (0;1) của y, giá trị x của hàm số $x = \sqrt{y}$ lớn hơn giá trị x của hàm số $x = y^2$. Do đó $\sqrt{y} > y^2$.

Thể tích của vật đó là: $V = \pi\int_0^1 \left|\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right|dx = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1 \left[y - y^4\right]dx = \frac{3\pi}{10}$.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): 3x − my + 1 = 0 và (Q): 5y + 12z + 3 = 0.

a) Tồn tại giá trị m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi m = 0.

c) Với $m = 4$ thì góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) gần bằng $42,4^o$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60^o khi và chỉ khi $m = \pm\frac{39}{\sqrt{407}}$.

Phương pháp giải:

Xác định vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng và áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vecto.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. $\overrightarrow{n_{(P)}} = (3;-m;0)$ và $\overrightarrow{n_{(P)}} = (0;5;12)$.

Để (P) // (Q) thì $\overrightarrow{n_{(P)}} = k\overrightarrow{n_{(Q)}} \Leftrightarrow (3;-m;0) = k(0;5;12)$, mà không có giá trị k nào thỏa mãn.

Vậy không có giá trị k nào để (P) // (Q).

b) Đúng. Để $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}} = 0 \Leftrightarrow 3.0 - m.5 + 0.12 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

c) Sai. $\cos\left((P),(Q)\right) = \frac{|3.0 - m.5 + 0.12|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 0^2}.\sqrt{0^2 + 5^2 + 12^2}}$

$= \frac{|3.0 - 4.5 + 0.12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}.\sqrt{0^2 + 5^2 + 12^2}} = \frac{20}{5.13} = \frac{4}{13}$.

$\Rightarrow \cos\left((P),(Q)\right) \approx 72,08^o$.

d) Sai. $\cos 60^o = \frac{|3.0 - m.5 + 0.12|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 0^2}.\sqrt{0^2 + 5^2 + 12^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|5m|}{13\sqrt{m^2 + 9}}$

$\Leftrightarrow 13\sqrt{m^2 + 9} = 10|m| \Leftrightarrow 169\left(m^2 + 9\right) = 100m^2 \Leftrightarrow 69m^2 = -1521$ (vô nghiệm).

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (2 điểm)

1) 2650	**2)** 19,3	**3)** 72	**4)** 10,3

Câu 1. Tại một lễ hội dân gian hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $Q(t) = 8t^3 - 144t^2 + 576t$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 14)$, Q'(t) tính bằng khách/giờ. Sau 1 giờ đã có 300 người có mặt. Hỏi số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 14 giờ là bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Tìm nguyên hàm Q(t) của Q'(t) và tìm giá trị lớn nhất của Q(t) trên đoạn [0;14].

Lời giải chi tiết:

Hàm số biểu diễn số lượng khách sau t giờ là:

$$Q(t) = \int Q'(t)dt = \int\left(8t^3 - 144t^2 + 576t\right)dt = 8.\frac{t^4}{4} - 144.\frac{t^3}{3} + 576.\frac{t^2}{2} + C = 2t^4 - 48t^3 + 288t^2 + C.$$

Vì sau 1 giờ có 300 người có mặt nên $Q(1) = 300 \Leftrightarrow 2.1^4 - 48.1^3 + 288.1^2 + C = 300 \Leftrightarrow C = 58$.

Suy ra $Q(t) = 2t^4 - 48t^3 + 288t^2 + 58$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của Q(t) trên đoạn [0;14].

Xét $Q'(t)=0 \Leftrightarrow 8t^3-144t^2+576t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=12 \\ t=6 \\ t=0 \end{array}\right.$.

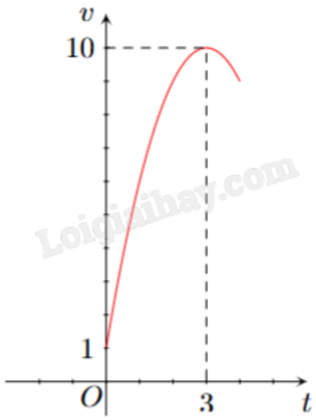
Ta có: $Q(0)=58$; $Q(6)=2650$; $Q(12)=58$; $Q(14)=1626$.

Do đó Q(6) = 2650 là giá trị lớn nhất của $Q(t)=2t^4-48t^3+288t^2+58$ trên đoạn [0;14].

Như vậy số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 14 giờ là 2650.

Đáp án: 2650.

Câu 2. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh I(3;10) và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km).



Phương pháp giải:

Tìm hàm v(t) biểu diễn vận tốc theo thời gian t và tính $\int_2^4 v(t)dt$.

Lời giải chi tiết:

Đồ thị hàm vận tốc là một đường parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên hàm vận tốc có dạng

$v(t)=at^2+bt+c \ (a<0)$.

Parabol đi qua điểm có tọa độ (0;1) và có đỉnh I(3;10) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 1=a.0^2+b.0+c \\ 10=a.3^2+b.3+c \\ -\dfrac{b}{2a}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 9a+3b=9 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=-1 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-t^2+6t+1.$$

Quãng đường vật đi được trong nửa thời gian sau của chuyển động là:

$$s(t)=\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4 \left(-t^2+6t+1\right)dt=\left.\left(-\frac{t^3}{3}+3t^2+t\right)\right|_2^4=\frac{58}{3}\approx 19,3 \text{ (km)}.$$

Đáp án: 19,3.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (Oyz) là mặt phẳng nằm ngang. Một đường ống nước thẳng đi qua hai điểm A(-1;1;2), B(2;1;3). Hỏi đường ống nước nói trên nghiêng bao nhiêu độ so với mặt phẳng nằm ngang (kết quả làm tròn đến độ)?

Phương pháp giải:

Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz).

Lời giải chi tiết:

Mặt phẳng (Oyz) có vecto pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0)$.

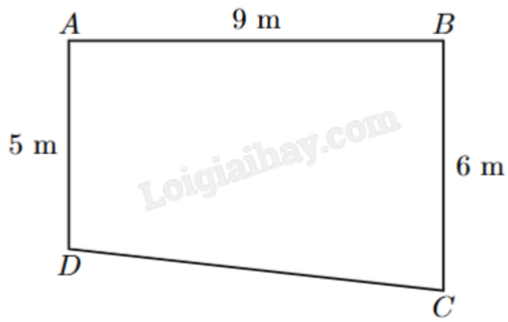
Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB} = (2+1;1-1;3-2) = (3;0;1)$ làm vecto chỉ phương.

Gọi góc giữa đường ống nước và mặt phẳng nằm ngang là α.

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{|3.1+0.0+1.0|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}.\sqrt{3^2+0^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha \approx 72^o$.

Đáp án: 72.

Câu 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang ABCD vuông tại A và B với độ dài AB = 9 m, AD = 5 m và BC = 6 m như hình vẽ. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu cm so với độ cao ở A (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Phương pháp giải:

Tìm tọa độ của các điểm A, B, D và lập phương trình mặt phẳng (ABD).

Tìm cao độ điểm C sao cho C thuộc mặt phẳng (ABD).

Lời giải chi tiết:

Gọi độ cao của các điểm A, B, C, D lần lượt là z_A, z_B, z_C, z_D.

Theo đề bài, ta có: $z_A = z_B = z_D = 0$.

Sau khi điều chỉnh, độ cao của các điểm B, D được thay đổi như sau:

$z_B = -0,06m$, $z_D = -0,036m$

Để mặt sân sau khi lát gạch là một mặt phẳng, ta cần lập phương trình mặt phẳng (ABCD) đi qua ba điểm $A(0;0;0)$, $B(9;0;-0,06)$, $D(0;5;-0,036)$.

Phương trình mặt phẳng có dạng: $Ax+By+Cz+D=0$.

Vì mặt phẳng đi qua $A(0;0;0)$, thay $A(0;0;0)$ vào phương trình ta được D = 0.

Do đó, phương trình mặt phẳng có dạng: $Ax+By+Cz=0$.

Tính hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}=(9;0;-0,06)$, $\overrightarrow{AD}=\left(0;5;-0,036\right)$.

Tích có hướng của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$:

$\left(0.(-0,036)-(-0,06).5;(-0,06).0-9.(-0,036);9.5-0.0\right)=(0,3;0,324;45)$.

Ta có phương trình mặt phẳng: $0,3x+0,324y+45z=0$.

Thay tọa độ $C(9;6;z_C)$ vào phương trình:

$0,3.(9)+0,324.(6)+45z_C=0 \Leftrightarrow 2,7+1,944+45z_C=0 \Leftrightarrow z_C=-0,1032$ (m).

Vậy độ cao của điểm C cần giảm là: $z_C=-0,1032\text{m}\approx -10,3\text{cm}$.

Bác An cần hạ độ cao của điểm C xuống khoảng 10,3 cm so với độ cao của điểm A.

Đáp án: 10,3.

Phần IV: Tự luận (3 điểm)

1) -1	**2)** 40	**3)** 27

Câu 1. Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $J=\int_{-1}^{2}f(x)dx$.

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của tích phân: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lũy thừa: $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

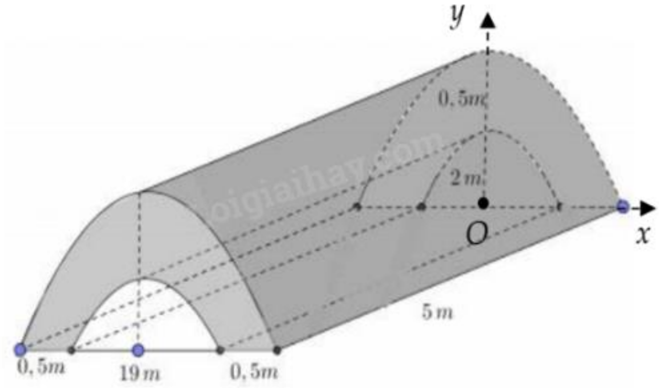
Lời giải chi tiết:

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x-1)dx+\int_{1}^{2}1dx$$

$$\left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1}+x\Big|_{1}^{2}=\left(1^2-1\right)-\left((-1)^2-(-1)\right)+2-1=0-2+2-1=-1.$$

Đáp án: -1.

Câu 2. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một đoạn đường hầm bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích (m^3) khối bê tông để đổ đủ đoạn đường hầm, biết đường cong trong hình vẽ là các đường parabol.



Phương pháp giải:

Ứng dụng tích phân, tính diện tích mặt cắt khối bê tông.

Áp dụng công thức tính thể tích: V = Sh.

Lời giải chi tiết:

Gọi parabol giới hạn mặt cắt của khối bê tông lần lượt là (P) và (Q). Giả sử (P) là parabol nằm phía trên.

(P) đi qua điểm có tọa độ (10;0) và tọa độ đỉnh là (0;2,5) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 = a.10^2 + b.10 + c \\ \dfrac{5}{2} = a.0^2 + b.0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{5}{2} \\ b = 0 \\ 100a + 10b = -2,5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} = 0.$$

(Q) đi qua điểm có tọa độ (9,5;0) và tọa độ đỉnh là (0;2) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 = a.\left(\dfrac{19}{2}\right)^2 + b.\dfrac{19}{2} + c \\ 2 = a.0^2 + b.0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 0 \\ \dfrac{361}{4}a + \dfrac{19}{2}b = -2 \end{cases} \Rightarrow (Q): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2 = 0.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành là:

$$S_P = \int_{-10}^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx = \frac{100}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (Q) và trục hoành là:

$$S_Q = \int_{-9,5}^{9,5}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx = \frac{76}{3}.$$

Diện tích mặt cắt khối bê tông là:

$$S = S_P - S_Q = \frac{100}{3} - \frac{76}{3} = 8\ \ (m^2).$$

Thể tích khối bê tông là:

$$V = Sh = 8.5 = 40\ \ (m^3).$$

Đáp án: 40.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1;1;1), B(−1;2;0), C(3;−1;2) và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$.

Phương pháp giải:

Gọi I(a;b;c) là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Biến đổi biểu thức P theo điểm I.

Lời giải chi tiết:

Gọi điểm I(a;b;c) là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó $\begin{cases} 3(1-a) + 5(-1-a) - 7(3-a) = 0 \\ 3(1-b) + 5(2-b) - 7(-1-b) = 0 \\ 3(1-c) + 5(0-c) - 7(2-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -23 \\ b = 20 \\ c = -11 \end{cases} \Rightarrow I(-23; 20; -11)$.

Ta có $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$

$= \left|3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{BI} - 7\overrightarrow{MI} - 7\overrightarrow{IC}\right|$

$= \left|\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right| = MI$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Mà M thuộc mặt phẳng (α) nên MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α), hay MI là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α).

Ta có $d\left(I;(\alpha)\right) = \dfrac{\left|2.(-23) - 1.20 + 2.(-11) + 7\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 27$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 27.

Đáp án: 27.