SỞ GD&ĐT NINH BÌNH

ĐỀ KHẢO SÁT, ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG GIÁO DỤC LỚP 12 THPT, GDTX

LẦN THỨ NHẤT - NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: Toán học

SƯU TẦM: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết chương trình Toán THPT.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải chương trình Toán THPT.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)

1) A	**2)** A	**3)** D	**4)** B	**5)** D	**6)** A
7) C	**8)** B	**9)** C	**10)** C	**11)** D	**12)** D

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội q = 3. Số hạng u_3 của cấp số nhân đã cho là

A. 18

B. 5

C. 6

D. 8

Phương pháp giải:

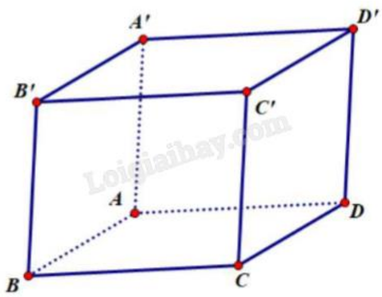
Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1q^{n-1}$.

Lời giải chi tiết:

$u_3 = u_1q^2 = 2.3^2 = 18$.

Đáp án A.

Câu 2. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ (hình vẽ). Đẳng thức nào sau đây sai?



A. $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC'}$

B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}$

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc cộng, trừ vecto, khái niệm hai vecto bằng nhau, quy tắc hình bình hành để chứng minh các đẳng thức trên đúng hoặc sai.

Lời giải chi tiết:

- Xét đáp án A:

Giả sử đẳng thức đúng: $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{BC}$ (vô lí vì hai vecto này ngược hướng).

Vậy đẳng thức A sai.

- Xét đáp án B:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$.

Vậy đẳng thức B đúng.

- Xét đáp án C:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ đúng theo quy tắc hình bình hành.

Vậy đẳng thức C đúng.

- Xét đáp án D:

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}$.

Vậy đẳng thức D đúng.

Đáp án A.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $(0,21)^x<1$ là

A. $(-\infty;0]$

B. $[0;+\infty)$

C. $(-\infty;0)$

D. $(0;+\infty)$

Phương pháp giải:

Với $0<a<1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $a^x<b$ là $(\log_a b;+\infty)$.

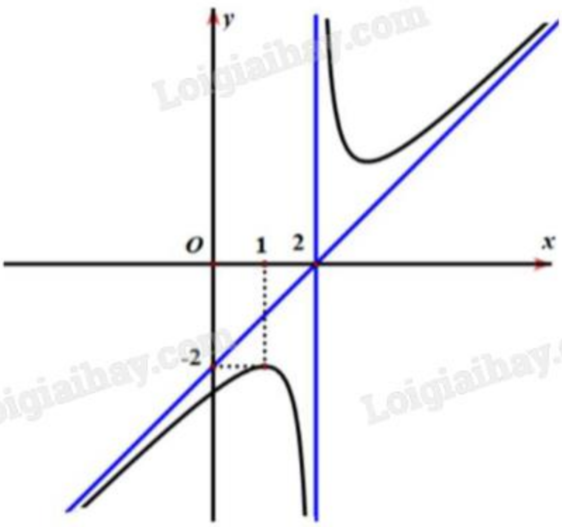
Lời giải chi tiết:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$(0,21)^x<1\Leftrightarrow x>\log_{0,21}1\Leftrightarrow x>0$.

Đáp án D.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với $a \neq 0$, $m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

A. y = 2x + 2

B. y = x – 2

C. y = 2x – 2

D. y = x + 2

Phương pháp giải:

Dựa vào tọa độ các điểm mà đường tiệm cận đi qua, giải hệ phương trình tìm ra các hệ số.

Lời giải chi tiết:

Phương trình đường tiệm cận xiên có dạng y = ax + b $(a \neq 0)$.

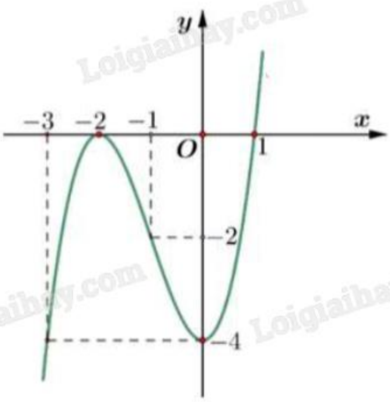
Đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm có tọa độ (2;0) và (0;-2) nên ta có:

$$\begin{cases} 0 = a.2 + b \\ -2 = a.0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tiệm cận xiên là y = x – 2.

Đáp án B.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba y = f(x) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;0)$

B. $(-2;0)$

C. $(-4;+\infty)$

D. $(0;+\infty)$

Phương pháp giải:

Hàm số đồng biến trên khoảng đồ thị đi lên từ trái sang.

Lời giải chi tiết:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Đáp án D.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. 9

B. 8

C. 10

D. 7

Phương pháp giải:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=a^b \end{cases}.$$

Lời giải chi tiết:

$$\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Đáp án A.

Câu 7. Trong không gian Oxy, cho điểm A(-5;2;3) và B là điểm đối xứng với A qua trục Oy. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{34}$

B. $\sqrt{8}$

C. $2\sqrt{34}$

D. $\sqrt{38}$

Phương pháp giải:

Điểm A' đối xứng với A(a;b;c) qua trục Oy có tọa độ (-a;b;-c).

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm A, B: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Lời giải chi tiết:

B đối xứng với A qua Oy nên B(5;2;-3).

$$AB=\sqrt{(5+5)^2+(2-2)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{34}.$$

Đáp án C.

Câu 8. Lớp 12A8 của trường THPT X có 41 học sinh được đánh số thứ tự từ 1 đến 41. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 3 bạn để làm nhiệm vụ kiểm tra vở bài tập của các bạn trong lớp. Xác suất để 3 bạn được chọn có số thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính S = 2a + b.

A. 553

B. 573

C. 653

D. 613

Phương pháp giải:

Áp dụng tính chất của cấp số cộng: $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

Lời giải chi tiết:

Xét phép thử T: "Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong 41 học sinh của lớp 12A8".

Ta có $n(\Omega) = C_{41}^3$.

Gọi A là biến cố: "3 học sinh được chọn có số thứ tự lập thành một cấp số cộng".

Gọi a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Vì $b = \frac{a+c}{2}$ nên a và c có cùng tính chẵn, lẻ.

Từ 1 đến 41 có 20 số chẵn và 21 số lẻ nên ta có $n(A) = C_{20}^2 + C_{21}^2$.

Do đó, xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{533}$.

Vậy S = 2a + b = 2.20 + 533 = 573.

Đáp án B.

Câu 9. Cho hình hộp ABC.A'B'C'D'. Mệnh đề nào dưới đây là sai?

A. (ADD'A') // (BCC'B')

B. (BDA') // (B'D'C)

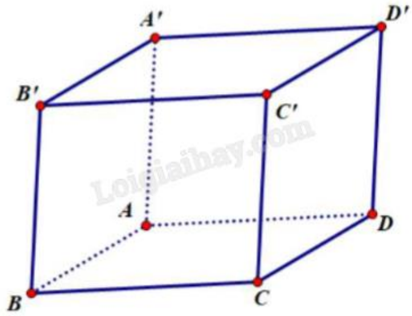
C. (ABA') // (B'D'C)

D. (ABCD) // (A'B'C'D')

Phương pháp giải:

Hai mặt phẳng song song với nhau nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng còn lại.

Lời giải chi tiết:



Dễ thấy các mệnh đề ở đáp án A, D đúng (hai mặt phẳng đối diện của hình hộp song song với nhau).

Xét đáp án B: $\begin{cases} BD//B'D' \Rightarrow BD//(B'D'C) \\ A'B//D'C \Rightarrow A'B//(B'D'C) \Rightarrow (BDA')//(B'D'C) \\ A'B \cap BD = \{B\} \end{cases}$.

Vậy mệnh đề đáp án B đúng.

Xét đáp án C: (ABA') chính là (ABB'A'). Mà (ABB'A') giao (B'D'C) tại B' nên hai mặt phẳng này không song song với nhau.

Vậy mệnh đề đáp án C sai.

Đáp án C.

Câu 10. Để chuẩn bị cho tiết học "Mạng xã hội: lợi và hại" (Hoạt động thực hành trải nghiệm môn Toán, lớp 10), giáo viên đã khảo sát thời gian sử dụng mạng xã hội trong một ngày của học sinh trong lớp 10A1 mình dạy và thu được mẫu số liệu như sau:

Thời gian sử dụng mạng xã hội (phút)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số học sinh	5	10	15	7	5	3

Thời gian trung bình (phút) sử dụng mạng xã hội của học sinh lớp 10A1 xấp xỉ bằng

A. 35

B. 30,5

C. 36,3

D. 33,6

Phương pháp giải:

Tìm giá trị đại diện của từng nhóm rồi sử dụng công thức tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

Lời giải chi tiết:

Thời gian trung bình (phút) sử dụng mạng xã hội của học sinh lớp 10A1 xấp xỉ bằng:

$$\overline{x} = \frac{15.5 + 25.10 + 35.15 + 45.7 + 55.5 + 65.3}{5 + 10 + 15 + 7 + 5 + 3} \approx 36,3.$$

Đáp án C.

Câu 11. Phương trình tanx = -1 có tất cả các nghiệm là

A. $\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $-\frac{\pi}{4}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương pháp giải:

$\tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải chi tiết:

$\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Đáp án D.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số là

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

Phương pháp giải:

Quan sát bảng biến thiên và nhận xét.

Lời giải chi tiết:

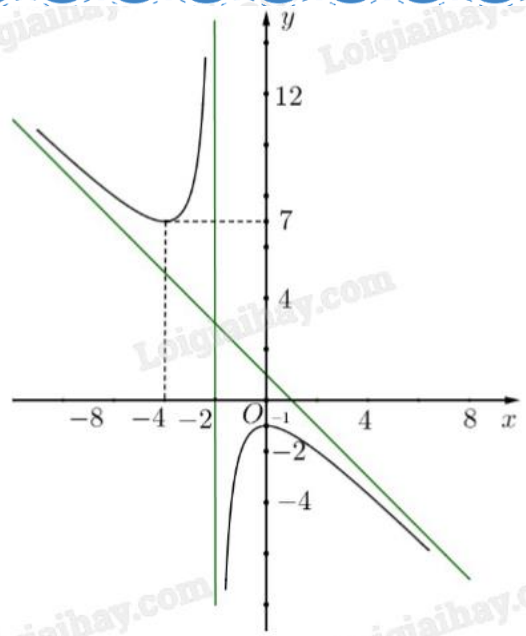
Giá trị cực tiểu của hàm số là y = -2 tại x = -1.

Đáp án D.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (4 điểm)

1) SĐĐS	**2)** SSĐĐ	**3)** SĐĐS	**4)** SĐĐS

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua hai điểm (0;1) và (1;0).



a) Hàm số đồng biến trên khoảng (-4;0).

b) Ta có a + b + c + d = -2.

c) Khoảng cách từ M(1;-8) đến đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\sqrt{5}$.

d) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Phương pháp giải:

Quan sát đồ thị, xét các điểm đồ thị đi qua và đường tiệm cận để tìm hàm số.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. Hàm số không xác định trên khoảng (-4;0) nên không đồng biến trên khoảng (-4;0).

b) Đúng. Đường tiệm cận xiên dạng $y = mx + n\ (m \ne 0)$ của đồ thị hàm số đi qua hai điểm (0;1) và (1;0)

nên ta có $\begin{cases} 1 = m.0 + n \\ 0 = m.1 + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$.

Do đó đường tiệm cận xiên có phương trình y= -x + 1, hệ số góc là m = -1.

Suy ra $\frac{a}{1} = -1 \Leftrightarrow a = -1$.

Đường tiệm cận đứng có phương trình x = -2, suy ra d = 2.

Ta có $y = f(x) = \frac{-x^2 + bx + c}{x + 2}$ đi qua hai điểm có tọa độ (0;-1), (-4;7) nên:

$$\begin{cases} \dfrac{-0^2 + b.0 + c}{0 + 2} = -1 \\ \dfrac{-(-4)^2 + b.(-4) + c}{(-4) + 2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{2} = -1 \\ \dfrac{-16 - 4b + c}{-4 + 2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy a + b + c + d = -1 + (-1) + (-2) + 2 = -2.

c) Đúng. Hai điểm cực trị của hàm số là A(0;-1) và B(-4;7) nên đường thẳng AB có phương trình

$y = -2x - 1 \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 0$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng AB là $d(M,AB)=\dfrac{|2-8+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$.

d) Sai. Hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^2-x-2}{x+2}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=e^{x+\sqrt{16-x^2}}$.

a) f'(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt.

b) $f'(x)=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}$, $\forall x\in[-4;4]$.

c) Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) là $e^{a+b\sqrt{c}}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và c là số nguyên tố). Khi đó a + 2b + 3c = 10.

d) $f(-4)=\dfrac{1}{e^4}$.

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm f'(x) của hàm số theo quy tắc đạo hàm hàm số hợp $\left(e^u\right)'=u'.e^u$.

Tìm nghiệm của phương trình f'(x) = 0.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. $f'(x)=\left(x+\sqrt{16-x^2}\right)'e^{x+\sqrt{16-x^2}}=\left(1+\dfrac{\left(16-x^2\right)'}{2\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}$

$=\left(1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}$ với $16-x^2>0\Leftrightarrow -4<x<4$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{16-x^2}=x\\16-x^2>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-4<x<4\\2x^2-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<4\\2x^2-16=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình f'(x) = 0 có một nghiệm.

b) Sai. $f'(x)=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)e^{x+\sqrt{16-x^2}}$ với $x\in(-4;4)$.

c) Đúng. $y=f(x)$ liên tục trên đoạn [-4;4]; f'(x) = 0 có một nghiệm $x=2\sqrt{2}$ trên khoảng (-4;4).

$f(-4)=e^{-4}$; $f(2\sqrt{2})=e^{4\sqrt{2}}$; $f(4)=e^4$.

Suy ra $\min\limits_{[-4;4]}f(x)=f(-4)=e^{-4}$; $\max\limits_{[-4;4]}f(x)=f(2\sqrt{2})=e^{4\sqrt{2}}$.

Ta có $e^{-4}.e^{4\sqrt{2}} = e^{-4+4\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow a+2b+3c=-4+2.4+3.2=10$.

d) Đúng. $f(-4)=e^{-4}=\dfrac{1}{e^4}$.

Câu 3. Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí hạt bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm t (đơn vị: giây) kể từ khi xuất phát được cho bởi công thức x(t) = 2t – 3ln(t + 1) (đơn vị: mét), $t \ge 0$. Hàm số v(t) = x'(t) (đơn vị: mét/giây) biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

a) Quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu tiên là 1,84 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Hạt đứng yên tại thời điểm t = 0,5 s.

c) $v(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$.

d) Vận tốc ban đầu của hạt là 1 m/s.

Phương pháp giải:

x'(t) = v(t).

Lời giải chi tiết:

a) Sai. $v(t)=x'(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$.

$v(t)=0 \Leftrightarrow 2-\dfrac{3}{t+1}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Quãng đường hạt đi được trong 3 giây đầu là:

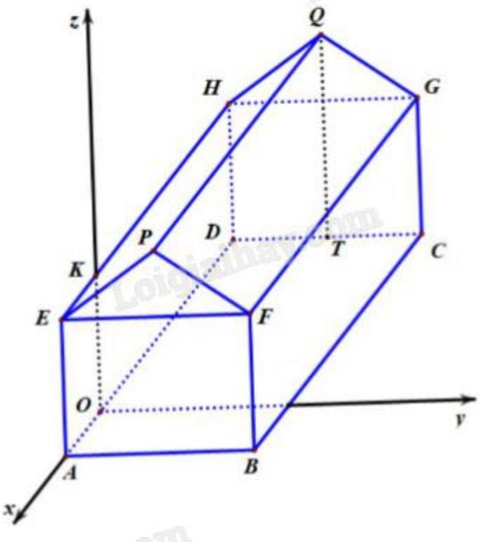
$2\left|x\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|+x(3)=1\left|1-3\ln\dfrac{3}{2}\right|+6-3\ln 4=4+6\ln\dfrac{3}{2}-3\ln 4\approx 2,27$ (m).

b) Đúng. Hạt đứng yên khi $v(t)=2-\dfrac{3}{t+1}=0 \Leftrightarrow t=0,5$ (s).

c) Đúng. $v(t)=x'(t)=2-\dfrac{3}{t+1}$.

d) Sai. Vận tốc ban đầu của hạt là $v(0)=2-\dfrac{3}{0+1}=-1$ (m/s).

Câu 4. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng ABFPE.DCGQH với ABFE là hình chữ nhật và EFP là tam giác cân tại P. Gọi T là trung điểm của DC. Các kích thước của kho chứa lần lượt là AB = 6 m; AE = 5 m; AD = 8 m; QT = 7 m. Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho OA = 2 m và các trục toạ độ tương ứng như hình vẽ dưới đây.



a) Tọa độ điểm Q là (-6;3;5).

b) Vecto $\overrightarrow{OC}$ có tọa độ là (-6;6;0).

c) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O. Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $5+2\sqrt{10}$ m.

d) Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 130000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 3750000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Phương pháp giải:

Tìm tọa độ các điểm cần thiết để tính toán.

Lời giải chi tiết:

Từ các dữ kiện của bài toán ta có toạ độ các điểm A(2;0;0), D(-6;0;0), B(2;6;0), E(2;0;5) C(-6;6;0).

a) Sai. Hình chiếu của Q lên mặt phẳng (Oxy) là T(-6;3;0) và QT = 7 nên có Q(-6;3;7).

b) Đúng. $\overrightarrow{OC}=(-6-0;6-0;0-0)=(-6;6;0)$.

c) Đúng. Có K(0;0;5), F(2;6;5), G(-6;6;5). Gọi I là vị trí đạt camera, khi đó I là trung điểm của FG nên:

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_F+x_G}{2}=\dfrac{2-6}{2}=-2 \\ y_I=\dfrac{y_F+y_G}{2}=\dfrac{6+6}{2}=6 \\ z_I=\dfrac{z_F+z_G}{2}=\dfrac{5+5}{2}=5 \end{cases} \Rightarrow I(-2;6;5).$$

Độ dài đoạn cáp tối thiểu là $OK+KI=5+\sqrt{(-2-0)^2+(6-0)^2+(5-5)^2}=5+2\sqrt{10}$ (m).

d) Sai. Có H(-6;0;5), Q(-6;3;7) nên $QH=\sqrt{13}$.

Diện tích mái tôn là $S=2HQ.EH=16\sqrt{13}$ (m^2).

Số tiền cần bỏ ra là $16\sqrt{13}.130000\approx 7500000$ (đồng).

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (3 điểm)

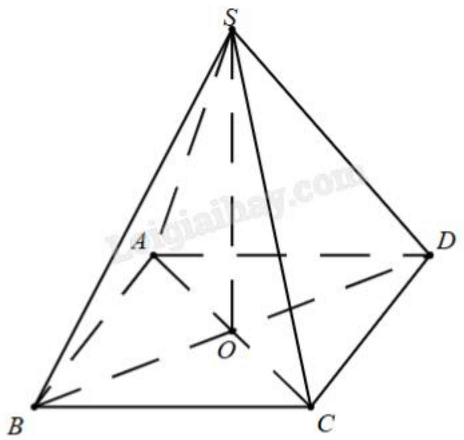
1) 1012	**2)** 240	**3)** 67,3	**4)** 1255	**5)** 100	**6)** 2,89

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, SO vuông góc với mặt đáy. Biết cạnh hình thoi bằng 2024, góc BAD bằng 120°, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Tìm hình chiếu vuông góc của C trên mặt phẳng (SD) và tính khoảng cách giữa C và hình chiếu đó.

Lời giải chi tiết:



Ta có $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp OC \\ AC \perp BD \Rightarrow OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD)$.

Mà O thuộc (SBD) nên $d(C,(SBD)) = OC$.

Vì $\widehat{BAD} = 120^{\circ}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = 60^{\circ}$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều và AC = AB = 2024.

Vậy $d(C,(SBD)) = OC = \frac{AC}{2} = \frac{2024}{2} = 1012$.

Đáp án: 1012.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, một khinh khí cầu ở tọa độ A(-16;-10;10) bắt đầu bay với vecto vận tốc không đổi $\vec{v} = (4;3;-1)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc toạ độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12 km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?

Phương pháp giải:

Biểu diễn tọa độ vị trí M của khinh khí cầu theo thời gian t. Tìm điều kiện của t sao cho khoảng cách OM nhỏ hơn hoặc bằng 12.

Lời giải chi tiết:

Ta có sau khoảng thời gian t (h) khinh khí cầu đang ở vị trí M thì toạ độ M được xác định bởi:

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-x_A=4t\\y_M-y_A=3t\\z_M-z_A=-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=4t+x_A=4t-16\\y_M=3t+y_A=3t-10\\z_M=-t+z_A=-t+10\end{cases}\Rightarrow M(4t-16;3t-10;-t+10)$$

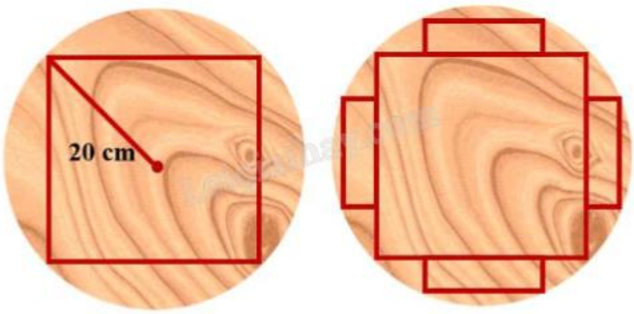
Để hệ thống kiểm soát không lưu quan sát được khinh khí cầu ở vị trí M thì:

$$OM\le 12\Leftrightarrow\sqrt{(-16+4t)^2+(-10+3t)^2+(10-t)^2}\le 12\Leftrightarrow\sqrt{456-208t+26t^2}\le 12\Leftrightarrow 2\le t\le 6.$$

Do đó hệ thống kiểm soát không lưu có thể quan sát khinh khí cầu trong khoảng thời gian 4 giờ hay 240 phút.

Đáp án: 240.

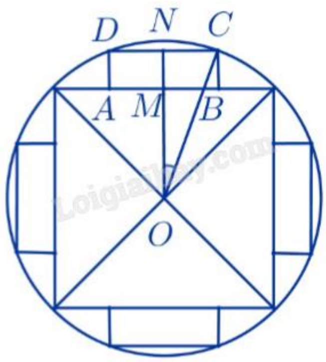
Câu 3. Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Phương pháp giải:

Lập hàm số biểu diễn diện tích của mặt cắt ngang thông qua biến x. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số vừa lập với điều kiện của x.

Lời giải chi tiết:



Gọi mặt cắt ngang của tấm ván là hình chữ nhật ABCD; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Hình vuông có đường chéo dài 20 cm có độ dài cạnh là $\frac{40}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$ cm.

Đặt $MN=x$ (cm), $OM=\frac{1}{2}.20\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ (cm). Khi đó: $ON=x+10\sqrt{2}$ (cm).

$$NC=\sqrt{OC^2-ON^2}=\sqrt{20^2-\left(x+10\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{-x^2-20\sqrt{2}x+200}$$

$\Rightarrow AB = 2NC = 2\sqrt{-x^2 - 20\sqrt{2}x + 200}\ \ (0 < x < 20 - 10\sqrt{2})$.

Diện tích mặt cắt ngang hình chữ nhật của tấm ván là:

$S = AB.MN = 2x\sqrt{-x^2 - 20\sqrt{2}x + 200} = 2\sqrt{-x^4 - 20\sqrt{2}x^3 + 200x^2}$.

$$S' = \frac{-4x^3 - 60\sqrt{2}x^2 + 400x}{\sqrt{-x^4 - 20\sqrt{2}x^3 + 200x^2}};\ S' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 - 60\sqrt{2}x^2 + 400x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{-5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Kết hợp ĐK, ta có $x = \dfrac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}$		$20-10\sqrt{2}$
S’		+	0	-	
S		$\nearrow$	$S\left(\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	

Vậy diện tích mặt cắt lớn nhất là $S\left(\dfrac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}\right) \approx 67,3\ (cm^2)$.

Đáp án: 67,3.

Câu 4. Trong một chiếc hộp có 30 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 6 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh, 8 viên bi màu vàng và 9 viên bi màu trắng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng a + b bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tổ hợp.

Chia các trường hợp cụ thể và tính số cách chọn cho từng trường hợp.

Lời giải chi tiết:

Số cách chọn 3 viên bi bất kì là: $C_{30}^3 = 4060$.

Số cách chọn 3 viên bi sao cho có 1 viên đỏ và 2 viên còn lại cùng màu là: $6.(C_7^2 + C_8^2 + C_9^2) = 510$.

Số cách chọn 3 viên bi sao cho có 1 viên xanh và 2 viên còn lại cùng màu là: $7.(C_6^2 + C_8^2 + C_9^2) = 553$.

Số cách chọn 3 viên bi sao cho có 1 viên vàng và 2 viên còn lại cùng màu là: $8.(C_7^2 + C_6^2 + C_9^2) = 576$.

Số cách chọn 3 viên bi sao cho có 1 viên trắng và 2 viên còn lại cùng màu là: $9.(C_7^2 + C_8^2 + C_6^2) = 576$.

Tổng số cách chọn 3 viên bi sao cho có đúng hai màu là: 510 + 553 + 576 + 576 = 2215.

Xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu là: $\frac{2215}{4060}=\frac{443}{812}$ nên a + b = 443 + 812 = 1255.

Đáp án: 1255.

Câu 5. Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x)=16000+500x-1,6x^2+0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x)=1700-7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ được tiêu thụ hết.

Phương pháp giải:

Lập hàm số biểu diễn lợi nhuận của công ty theo biến x. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số và kết luận giá trị x tương ứng.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 1700-7x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1700}{7}$.

Doanh thu của công ty tiêu thụ hết x sản phẩm là $R(x)=xp(x)=1700x-7x^2$.

Lợi nhuận của công ty khi bán hết x sản phẩm là

$$P(x)=R(x)-C(x)=1700x-7x^2-\left(16000+500x-1,6x^2+0,004x^3\right)$$

$$=-0,004x^3-5,4x^2+1200x-16000\ \left(0<x<\frac{1700}{7}\right).$$

$$P'(x)=-0,012x^2-10,8x+1200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1000 \\ x=100 \end{array}\right..$$

Kết hợp ĐK, ta có x = 100 thỏa mãn.

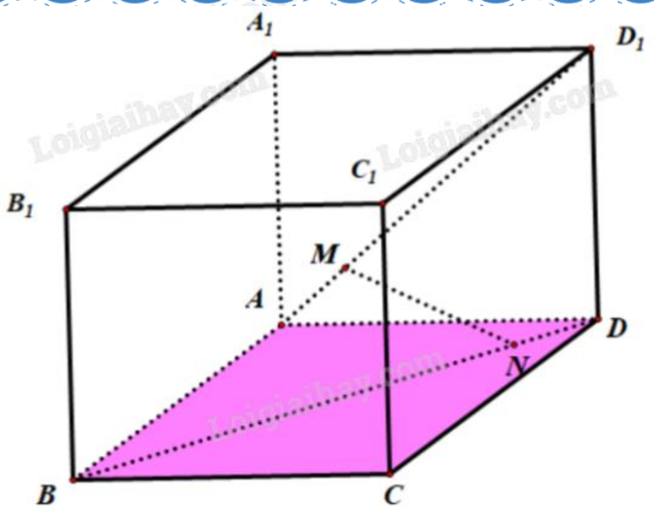
Bảng biến thiên:

x	0		100		$\frac{1700}{7}$
P'(x)		-	0	+	
P(x)		↗	46000	↘	

Vậy mỗi tháng nhà máy nên sản xuất 100 sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Đáp án: 100.

Câu 6. Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với độ dài các cạnh bằng 5 m. Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nối từ một điểm M trên đường chéo AD_1 xuống một điểm N trên mặt đất BD đồng thời AM = DB. Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Phương pháp giải:

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa.

Lời giải chi tiết:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với điểm A, B thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy, A_1 thuộc tia Oz.

Đặt $AM = DN = x\sqrt{2}$.

Ứng dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta tính được M(0;x;x) và N(x;5 – x;0).

Khi đó $MN^2 = (x-0)^2 + (5-x-x)^2 + (0-x)^2 = 6x^2 - 20x + 25 = f(x)$.

$f'(x) = 12x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Vậy dàn đèn có chiều dài ngắn nhất bằng $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,89$.

Đáp án: 2,89.