SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12

LẦN 1 - NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: Toán học

SƯU TẦM: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết chương trình Toán THPT.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải chương trình Toán THPT.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)

1) D	**2)** B	**3)** C	**4)** B	**5)** B	**6)** D
7) A	**8)** B	**9)** C	**10)** B	**11)** A	**12)** D

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai d = 2. Số hạng thứ 5 của (u_n) bằng

A. 14

B. 5

C. 6

D. 11

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải chi tiết:

$u_5 = 3 + (5-1).2 = 11$.

Đáp án D.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1$ là

A. $(-\infty;1)$

B. $(-1;1)$

C. $(1;+\infty)$

D. $(0;3)$

Phương pháp giải:

Với 0 < a < 1, ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < a^b \end{cases}$.

Lời giải chi tiết:

ĐKXĐ: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -1 \Leftrightarrow x+1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x+1<2 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp ĐK, ta được –1 < x < 1.

Đáp án B.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $3^x = 12$ là

A. $x = 4$

B. $x = 9$

C. $x = \log_3 12$

D. $x = \log_{12} 3$

Phương pháp giải:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Lời giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$3^x = 12 \Leftrightarrow x = \log_3 12$.

Đáp án C.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác ABC vuông tại B. Hình chóp S.ABCD có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 2

B. 4

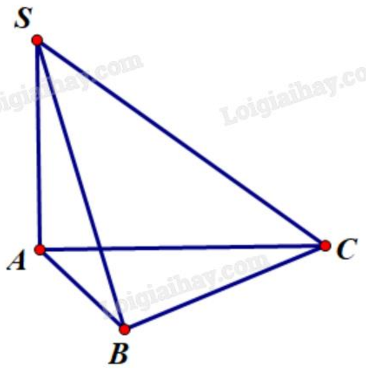
C. 3

D. 1

Phương pháp giải:

Áp dụng định nghĩa của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

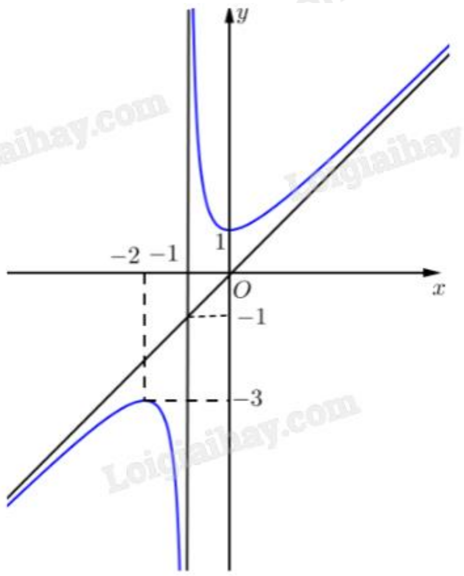
Lời giải chi tiết:



Các tam giác vuông là SAB, SAC, SBC và ABC.

Đáp án B.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (với $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$, $ad\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

A. $y=-x$

B. $y=x$

C. $y=x-1$

D. $y=x+1$

Phương pháp giải:

Dựa vào tọa độ các điểm mà đường tiệm cận đi qua, giải hệ phương trình tìm ra các hệ số.

Lời giải chi tiết:

Phương trình đường tiệm cận xiên có dạng y = ax + b $(a\neq 0)$.

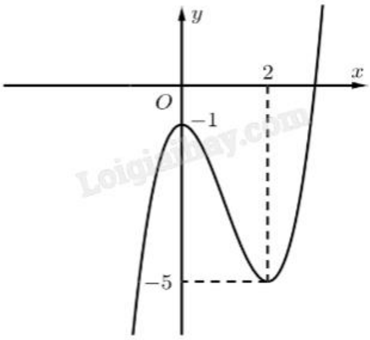
Đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm có tọa độ (0;0) và (-1;-1) nên ta có:

$$\begin{cases}0=a.0+b\\-1=a.(-1)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\Rightarrow y=x..$$

Vậy phương trình đường tiệm cận xiên là y = x.

Đáp án B.

Câu 6. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$

B. $(2;+\infty)$

C. $(-1;2)$

D. $(0;2)$

Phương pháp giải:

Hàm số nghịch biến trên khoảng đồ thị đi xuống từ trái sang phải.

Lời giải chi tiết:

Trên khoảng (0;2), đồ thị đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến trên (0;2).

Đáp án D.

Câu 7. Trong không gian Oxy, cho vecto $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là

A. $(2;-3;4)$

B. $(2;4;-3)$

C. $(2;3;4)$

D. $(-2;3;-4)$

Phương pháp giải:

$\vec{a} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k} = (m;n;p)$.

Lời giải chi tiết:

$\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} = (2;-3;4)$.

Đáp án A.

Câu 8. Trong không gian Oxy, cho hai điểm A(-2;1;0), B(3;-2;1). Tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(-5;3;-1)$

B. $(5;-3;1)$

C. $(1;-1;1)$

D. $(-1;1;-1)$

Phương pháp giải:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Lời giải chi tiết:

$\overrightarrow{AB} = (3+2; -2-1; 1-0) = (5; -3; 1)$.

Đáp án B.

Câu 9. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3}$ là

A. $-\frac{3}{x^4} + C$

B. $-\frac{1}{x^2} + C$

C. $-\frac{1}{2x^2} + C$

D. $-\frac{1}{4x^4} + C$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lũy thừa $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Lời giải chi tiết:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Đáp án C.

Câu 10. Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a;b] và c là số thực tùy ý thuộc đoạn [a;b]. Nếu $\int_a^b f(x)dx = 3$ và $\int_a^c f(x)dx = 8$ thì tích phân $\int_c^b f(x)dx$ bằng

A. 11

B. -5

C. 5

D. -11

Phương pháp giải:

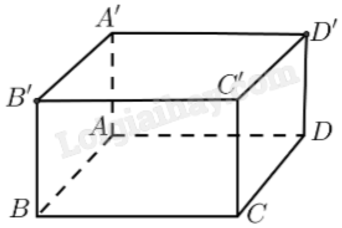
Áp dụng tính chất của tích phân $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Lời giải chi tiết:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \Leftrightarrow 3 + \int_b^c f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_b^c f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_c^b f(x)dx = -5.$$

Đáp án B.

Câu 11. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D” (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD'}$ bằng

A. 135^o

B. 60^o

C. 30^o

D. 45^o

Phương pháp giải:

Nếu a // b thì (a,c) = (b,c).

Lời giải chi tiết:

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD'}\right)=\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CD'}\right)=180^o-\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}\right)=180^o-45^o=135^o$.

Đáp án D.

Câu 12. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo ba năm tuổi tại một nông trường được cho bởi bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho bằng

A. 0,886

B. 0,115

C. 0,826

D. 0,286

Phương pháp giải:

Tứ phân vị thứ k, kí hiệu là Q_k, với k = 1, 2, 3 của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:

$$Q_k=u_m+\frac{\frac{kn}{4}-C}{n_m}(u_{m+1}-u_m)$$

trong đó:

$n=n_1+n_2+n_3+...+n_k$ là cỡ mẫu;

$[u_m;u_{m+1}]$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ k;

n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ k;

$C=n_1+n_2+n_3+...+n_{m-1}$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Lời giải chi tiết:

Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc về chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1;...;x_5 \in [8,4;8,6)$; $x_6;\ldots;x_{17} \in [8,6;8,8)$; $x_{18};\ldots;x_{42} \in [8,8;9,0)$; $x_{43};\ldots;x_{86} \in [9,0;9,2)$; $x_{87};\ldots;x_{100} \in [9,2;9,4)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [8,8;9,0)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 8,8 + \dfrac{\frac{100}{4} - (5+12)}{25}(9,0 - 8,8) = 8,864$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [9,0;9,2)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3 = 9,0 + \dfrac{\frac{3.100}{4} - (5+12+25)}{44}(9,2 - 9,0) = 9,15$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 0,286$.

Đáp án D.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (4 điểm)

1) ĐSĐS	**2) SĐĐS**	**3) ĐĐSĐ**	**4) SĐĐĐ**

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \ln x - \frac{x}{2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = (0; +\infty)$.

b) $f(1) = -\frac{1}{2}$; $f(e) = -\frac{e}{2}$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn [1;e] là x = 2.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn [1;e] bằng $-\frac{1}{2}$.

Phương pháp giải:

a) Hàm $y = \ln x$ có ĐKXĐ là x > 0.

b) Thay x = 1, x = e vào hàm số rồi tính giá trị.

c) Tính f'(x) rồi giải phương trình f'(x) = 0. Xét xem nghiệm đó có thuộc [1;e] hay không.

d) Tính giá trị của f(x) tại các điểm x = 1, x = e và nghiệm của f'(x) = 0.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. ĐKXĐ: x > 0. Vậy tập xác định là $D=(0;+\infty)$.

b) Sai. $f(1)=\ln 1-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$; $f(e)=\ln e-\frac{e}{2}=1-\frac{e}{2}$.

c) Đúng. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=2$. Mà $2\in[1;e]$ nên x = 2 là nghiệm của f'(x) = 0 trên [1;e].

d) Sai. $f(1)=-\frac{1}{2}$; $f(e)=1-\frac{e}{2}$; $f(2)=\ln 2-\frac{2}{2}=\ln 2-1$.

Vậy giá trị lớn nhất của f(x) trên [1;e] bằng $\ln 2-1$ khi x = 2.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{x}$.

a) $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C$.

b) Hàm số f(x) là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{x^2+7}{x^2}$.

c) Biết $\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\frac{m}{n}+m\ln n$, với $m,n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tổng m + 2025n = 4057.

d) Gọi G(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) thỏa mãn G(1) = 4 và G(3) + G(-9) = 20. Khi đó

$G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tổng $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Phương pháp giải:

Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm, nguyên hàm, tích phân cơ bản.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. $\int f(x)dx=\int\frac{x^2+5x-7}{x}dx=\int\left(x+5-\frac{7}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

b) Đúng. $f'(x)=\frac{(x^2+5x-7)'x-(x^2+5x-7)x'}{x^2}$

$=\frac{(2x+5)x-(x^2+5x-7)}{x^2}=\frac{2x^2+5x-x^2-5x+7}{x^2}=\frac{x^2+7}{x^2}=g(x)$.

Vì f'(x) = g(x) nên f(x) là một nguyên hàm của g(x).

c) Đúng. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2+5x-7}{x}dx=\left.\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|\right|_{-2}^{-1}$

$=\left[\frac{(-1)^2}{2}+5(-1)-7\ln|-1|\right]-\left[\frac{(-2)^2}{2}+5(-2)-7\ln|-2|\right]=-\frac{9}{2}-(-8-7\ln 2)=\frac{7}{2}+7\ln 2$.

Vậy $m+2025n=7+2025.2=4057$.

d) Sai. $G(x)=\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

$G(-6)-G(-9)=-\frac{15}{2}-7\ln|x|\Big|_{-9}^{-6}=-\frac{15}{2}-7\ln\frac{2}{3}$; $G(3)-G(1)=14-7\ln|x|\Big|_{1}^{3}=14-7\ln 3$.

Ta có $[G(-6)-G(-9)]-[G(3)-G(1)]=\left(-\frac{15}{2}-7\ln\frac{2}{3}\right)-(14-7\ln 3)$

$\Leftrightarrow G(-6)-[G(-3)+G(-9)]+G(1)=-\frac{43}{2}-7(\ln 2-\ln 3)+7\ln 3$

$\Leftrightarrow G(-6)-20+4=-\frac{43}{2}-7\ln 2+7\ln 3+7\ln 3$

$\Leftrightarrow G(-6)=-7\ln 2+14\ln 3-\frac{11}{2}$.

Vậy $a+b+c=-7+14-\frac{11}{2}=\frac{3}{2}$.

Câu 3. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách Toán, 4 cuốn sách Vật lí và 3 cuốn sách Hóa học. Thầy giáo lấy ngẫu nhiên ra 6 cuốn sách và tặng cho 6 học sinh mỗi em một cuốn.

a) Số cách lấy ra 6 cuốn sách và tặng cho 6 học sinh là A_{12}^{6}.

b) Số cách lấy ra 6 cuốn sách chỉ có hai trong ba loại sách Toán, Vật lí, Hóa học là $C_7^6+C_8^6+C_9^6$.

c) Số cách lấy ra 6 cuốn sách sao cho mỗi loại sách Toán, Vật lí, Hóa học đều còn lại ít nhất một cuốn là $A_{12}^{6}-\left(C_7^6+C_8^6+C_9^6\right)$.

d) Xác suất để sau khi tặng xong, mỗi loại sách đều còn lại ít nhất một cuốn là $\frac{115}{132}$.

Phương pháp giải:

Chia trường hợp cụ thể rồi áp dụng công thức chỉnh hợp, tổ hợp, công thức xác suất cổ điển.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Thầy giáo cần chọn ra 6 cuốn sách trong tổng số 12 cuốn, mỗi cuốn đều khác nhau để tặng cho mỗi học sinh nên số cách là A_{12}^{6}.

b) Đúng. Ta có các trường hợp sau:

TH1: Không lấy ra sách Toán.

Số cách lấy ra 6 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^6.

TH2: Không lấy ra sách Vật lí.

Số cách lấy ra 6 cuốn trong 8 cuốn còn lại là C_8^6.

TH3: Không lấy ra sách Hóa học.

Số cách lấy ra 6 cuốn trong 9 cuốn còn lại là C_9^6.

Vậy tổng số cách 6 cuốn sách chỉ có hai trong ba loại sách là $C_7^6+C_8^6+C_9^6$.

c) Sai. Tổng số cách lấy ngẫu nhiên 6 trong 12 cuốn sách là C_{12}^{6}.

Ta xét các trường hợp lấy ra 6 cuốn và có loại sách bị hết.

TH1: Lấy được tất cả số sách Toán.

Số cách lấy ra 5 cuốn sách Toán và 1 trong 7 cuốn còn lại là $C_5^5.C_7^1 = C_7^1$.

TH2: Lấy được tất cả số sách Vật lí.

Số cách lấy ra 4 cuốn sách Vật lí và 2 trong 8 cuốn còn lại là $C_4^4.C_8^2 = C_8^2$.

TH3: Lấy được tất cả số sách Hóa học.

Số cách lấy ra 3 cuốn sách Hóa học và 3 trong 9 cuốn còn lại là $C_3^3.C_9^3 = C_9^3$.

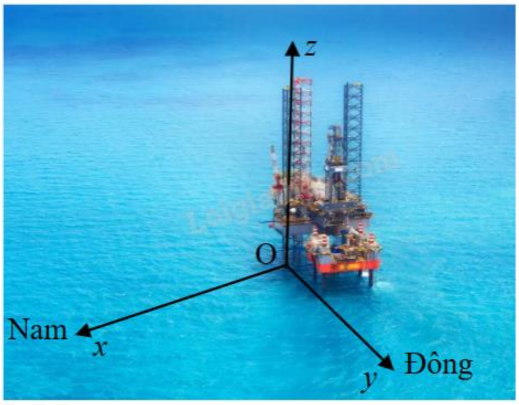
Số cách lấy ra 6 cuốn sách sao cho mỗi loại sách Toán, Vật lí, Hóa học đều còn lại ít nhất 1 cuốn là

$C_{12}^6 - \left(C_7^1 + C_8^2 + C_9^3\right)$.

d) Đúng. Xác suất để sau khi tặng xong, mỗi loại sách đều còn lại ít nhất 1 cuốn là:

$$\frac{C_{12}^6 - \left(C_7^1 + C_8^2 + C_9^3\right)}{C_{12}^6} = \frac{115}{132}.$$

Câu 4. Trong không gian, xét hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là mặt phẳng) với tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông và tia Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại O có phạm vi theo dõi là 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí A ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách O 25 km về phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí B(-20;15;0).



a) Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng 25 km.

b) Radar không phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí A.

c) Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí B.

d) Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí C cách O 15 km về phía nam. Để radar phát hiện ra thì tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông cách O tối đa $15\sqrt{3}$ km.

Phương pháp giải:

Dựa vào hệ trục, tìm tọa độ các điểm theo dữ kiện của đề bài. Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$.

Lời giải chi tiết:

Từ các dữ kiện của bài toán, ta có toạ độ tàu thám hiểm là điểm A(25;-15;-10).

a) Sai. Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng $OA = \sqrt{25^2 + (-15)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{38}$ (km).

b) Đúng. Ta có $OA = 5\sqrt{38} \approx 30,8$ km, mà phạm vi theo dõi của radar là 30 km nên radar không phát hiện được tàu thám hiểm ở vị trí A.

c) Đúng. $OB = \sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2} = 25$ (km). Vì 25 < 30 nên radar phát hiện được tàu đánh cá ở vị trí B.

d) Đúng. Ta có C(15;x;0).

Để radar phát hiện được thì $OC \le 30 \Leftrightarrow \sqrt{15^2 + x^2} \le 30 \Leftrightarrow 15^2 + x^2 \le 30 \Leftrightarrow x \le 15\sqrt{3}$, hay tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông tối đa $15\sqrt{3}$ km.

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (3 điểm)

1) 0,73	**2)** 84	**3)** 284	**4)** 1,7	**5)** 0,57	**6)** 0,18

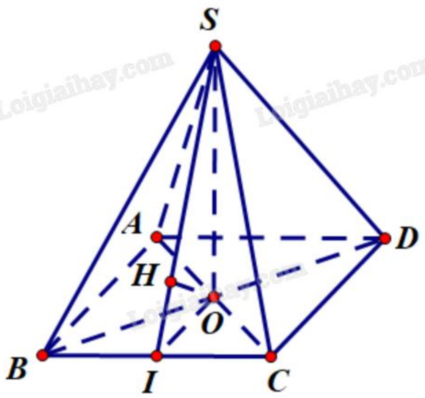
Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có O là giao điểm của AC và BD. Biết SO = AB = 2. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Phương pháp giải:

Giả sử $(d,(SBC)) = \alpha$. Khi đó $\sin\alpha = \dfrac{d(A,(SBC))}{SA} = \dfrac{2d(O,(SBC))}{SA}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pythagore để tính.

Lời giải chi tiết:



Giả sử $(d,(SBC)) = \alpha$. Khi đó $\sin\alpha = \dfrac{d(A,(SBC))}{SA} = \dfrac{2d(O,(SBC))}{SA}$.

Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó $SI \perp BC$.

Kẻ $OH \perp SI$, H thuộc SI.

Ta có $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$.

Mặt khác $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Xét tam giác SOI vuông tại O có đường cao OH:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1^2}=\frac{5}{4}\Rightarrow OH=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Xét tam giác SAO vuông tại O: $SA=\sqrt{AO^2+SO^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{6}$.

Vậy $\sin\alpha=\frac{2d\left(O,(SBC)\right)}{SA}=\frac{2OH}{SA}=\frac{2.\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}\approx 0,73$.

Đáp án: 0,73.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?

Phương pháp giải:

Liệt kê các trường hợp. Áp dụng công thức tính số hoán vị.

Lời giải chi tiết:

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$, với a, b, c, d là các chữ số từ 0 đến 9, $a\neq 0$.

TH1: 3 trong 4 chữ số a, b, c, d bằng 0.

Khi đó a = 7.

Có 1 số thỏa mãn.

TH2: 2 trong 4 chữ số a, b, c, d bằng 0.

- Chọn vị trí cho 2 chữ số 0 có $C_3^2=3$ cách.

- Cặp 2 chữ số còn lại có thể là (1;6), (2;5), (3;4) và hoán vị của chúng.

Có 3.3.2! = 18 số thỏa mãn.

TH3: 1 trong 4 chữ số a, b, c, d bằng 0.

- Chọn vị trí cho 1 chữ số 0 có $C_3^1=3$ cách.

- Bộ 3 chữ số còn lại có thể là (1;1;5), (1;2;4), (1;3;3), (2;3;3) và hoán vị của chúng.

+ Bộ (1;2;4) có số hoán vị là 3! = 6.

+ 3 bộ còn lại có số hoán vị là 3.

Có 3.(1.6 + 3.3) = 45 số thỏa mãn.

TH4: Không có chữ số nào bằng 0.

Có 3 bộ số (1;1;1;4), (1;1;2;3) và (1;2;2;2) và hoán vị của chúng.

- Bộ (1;1;2;3) có số hoán vị là 4.3 = 12.

- 2 bộ còn lại có số hoán vị là 4.

Có 12 + 2.4 = 20 số thỏa mãn.

Vậy, có tất cả 1 + 18 + 45 + 20 = 84 số thỏa mãn.

Đáp án: 84.

Câu 3. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0<x\leq 2500)$, tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $f(x)=2006x-x^2$ và tổng chi phí là

$g(x)=x^2+1438x-1209$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) (0 < t < 320). Giá trị của t bằng bao nhiêu nghìn đồng để nhà nước nhận số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng nhận được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó?

Phương pháp giải:

Lập hàm tính lợi nhuận. Ứng dụng đồ thị hàm số bậc hai và đạo hàm để tìm ra giá trị t.

Lời giải chi tiết:

Ta có lợi nhuận là $P(x)=f(x)-g(x)-xt=2006x-x^2-(x^2+1438x-1209)-xt$

$=-2x^2+568x-xt+1209=-2x^2+(568-t)x+1209$.

Đồ thị hàm số P(x) là một parabol có bề lõm hướng xuống dưới (do a = -2 < 0).

Do đó, P(x) lớn nhất tại đỉnh parabol, hay $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{568-t}{2(-2)}=\frac{568-t}{4}$.

Số tiền thuế thu được khi đó là $xt=\frac{568-t}{4}t=-\frac{t^2}{4}+142t=h(t)$. Ta cần tìm t để h(t) lớn nhất.

Có $h'(t)=-\frac{1}{2}t+142=0\Leftrightarrow t=284$.

t	0	284	320
h’(t)	+		-
h(t)	↗	20164	↘

Vậy giá trị t cần tìm là 284.

Đáp án: 284.

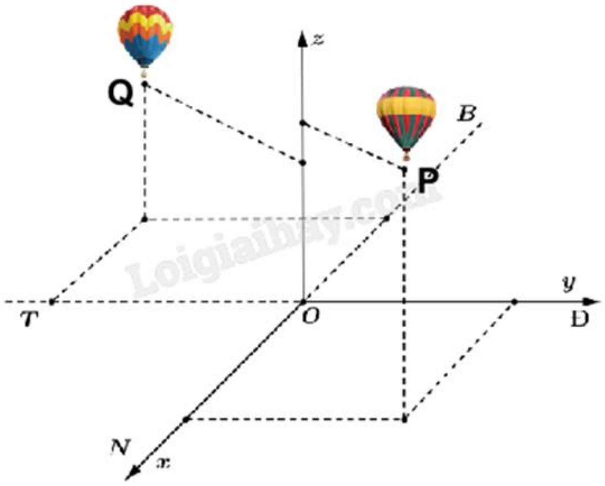
Câu 4. Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 1,5 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60 m. Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3 km về phía bắc và 2,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40 m. Trong không gian, xét hệ tọa độ Oxyz với gốc toạ độ O đặt tại điểm xuất phát của hai drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp, cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu đó tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ kma theo hướng bắc và kmb theo hướng tây. Khi đó a + b bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Sử dụng quy tắc tính tọa độ vecto, tính độ dài vecto.

Lời giải chi tiết:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Gọi vị trí chiếc drone thứ nhất và thứ hai lần lượt là P, Q.

Khi đó: $P(2,5;1,5;0,06)$, $Q(-3;-2,5;0,04)$.

Gọi I là điểm tiếp nhiên liệu trên mặt đất (Oxy). Khi đó $I(x_I;y_I;0)$.

Khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất, tức là IP + IQ nhỏ nhất.

Gọi P' là điểm đối xứng của P qua (Oxy). Khi đó $P'(2,5;1,5;-0,06)$ và IP = IP'.

Vậy để IP + IQ nhỏ nhất thì IP' + IQ nhỏ nhất. Điều đó xảy ra khi Q, I, P' thẳng hàng, hay $\overrightarrow{QP'}$, $\overrightarrow{QI}$ cùng phương.

$\overrightarrow{QP'}=(2,5+3;1,5+2,5;-0,06-0,04)=(5,5;4;-0,1)$; $\overrightarrow{QI}=(x_I+3;y_I+2,5;-0,04)$.

Để $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{QI}$ cùng phương thì $\dfrac{x_I+3}{5,5}=\dfrac{y_I+2,5}{4}=\dfrac{-0,04}{-0,1}$. Từ đó tính được $x_I=-0,8$; $y_I=-0,9$.

Ta có $I(-0,8;-0,9;0)$, suy ra $a=0,8$; $b=0,9$. Vậy a + b = 0,8 + 0,9 = 1,7.

Đáp án: 1,7.

Câu 5. Trong một trò chơi điện tử, hai bạn Tít và Mít thi xem ai chạy được quãng đường xa hơn. Tít chạy với vận tốc $v_T=5\sqrt{t}$ (km/h), quãng đường Mít chạy được cho bởi phương trình $s_M(t)=5t-\dfrac{5}{2\pi}\sin(2\pi t)$ (km) (với t tính theo giờ). Nếu cuộc đua kết thúc khi Tít hoặc Mít chạy được 10 km đầu tiên thì khoảng cách giữa hai bạn là bao nhiêu km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Phương pháp giải:

Ứng dụng tích phân để tìm ra Tít hay Mít chạy được 10 km nhanh hơn. Tại thời điểm đó, tính quãng đường bạn còn lại đã chạy được. Từ đó, tính khoảng cách giữa hai bạn.

Lời giải chi tiết:

Ta có $s_M'(t)=5-\frac{5}{2\pi}\cos\left(2\pi t\right).2\pi=5-5\cos\left(2\pi t\right)\ge 0$ nên hàm số $s_M(t)$ đồng biến.

Khi đó, $s_M(t)=5t-\frac{5}{2\pi}\sin\left(2\pi t\right)=10\Leftrightarrow t=2$.

Phương trình quãng đường Tít chạy được là $s_T(t)=\int v_T dt=\int 5\sqrt{t}dt=5.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{10}{3}t\sqrt{t}+C$.

Vì s(0) = 0 nên C = 0. Do đó $s_T(t)=\frac{10}{3}t\sqrt{t}$.

Ta có $s_T(t)=\frac{10}{3}t\sqrt{t}=10\Leftrightarrow t\sqrt{t}=3\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{9}$.

Vì $\sqrt[3]{9}>2$ nên Mít chạy được quãng đường 10 km trước. Cùng lúc đó, Tít chạy được

$s_T(2)=\frac{10}{3}.2\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$ km.

Khoảng cách giữa hai bạn là $10-\frac{20\sqrt{2}}{3}\approx 0,57$ km.

Đáp án: 0,57.

Câu 6. Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu cân đối, đồng chất giống nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Tính xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng.

Phương pháp giải:

Liệt kê các trường hợp. Áp dụng quy tắc nhân xác suất, công thức tính tổ hợp.

Lời giải chi tiết:

Không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=2^8$.

Có tối đa 4 bạn cùng đứng.

TH1: Có 4 bạn cùng đứng.

$\Rightarrow$ Số cách: 2.

TH2: Có 3 bạn cùng đứng. C_8^3 cách:

- Số cách chọn 3 bạn liền kề cùng đứng: 8.
- Số cách chọn 2 bạn liền kề và 1 bạn không liền kề cùng đứng: 8.4 = 32.

$\Rightarrow$ Số cách: $C_8^3-8-32=16$.

TH3: Có 2 bạn cùng đứng:

$\Rightarrow$ Số cách: $\frac{8.5}{2}=20$.

TH4: Có 1 bạn đứng.

$\Rightarrow$ Số cách: $C_8^1=20$.

TH5: Có 0 bạn đứng.

$\Rightarrow$ Số cách: 1.

Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là $P = \frac{2+16+20+8+1}{2^8} = \frac{47}{256} \approx 0,18$.

Đáp án: 0,18.