ĐỀ THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT – Đề số 8

Môn: Toán học

Chương trình GDPT 2018

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết chương trình Toán THPT.

- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm Toán học.

- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải chương trình Toán THPT.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)

1) C	**2)** A	**3)** B	**4)** D	**5)** C	**6)** D
7) B	**8)** A	**9)** D	**10)** C	**11)** A	**12)** B

Câu 1. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, một vecto chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{c} = (-1; 3; -2)$

B. $\vec{d} = (2; 1; -3)$

C. $\vec{a} = (-2; 1; 3)$

D. $\vec{b} = (1; -3; 2)$

Phương pháp giải:

Đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

Lời giải chi tiết:

Một vecto chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -1; -3)$. Do $\vec{a} = (-2; 1; 3)$ cùng phương với $\vec{u} = (2; -1; -3)$ nên $\vec{a} = (-2; 1; 3)$ cũng là một vecto chỉ phương của d.

Đáp án C.

Câu 2. Cho hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [-1;3], biết f(3) = 5; f(-1) = -2; giá trị của $\int_{-1}^{3} f'(x)dx$ là

A. 7

B. 3

C. 4

D. -7

Phương pháp giải:

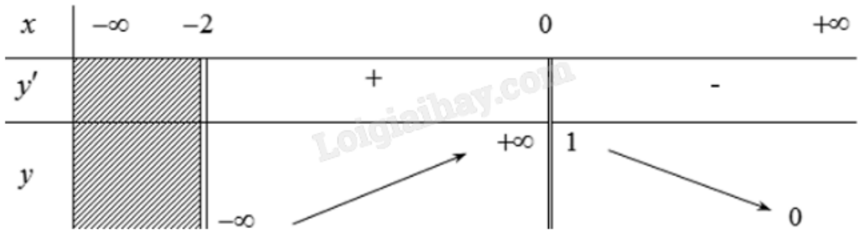
$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Lời giải chi tiết:

$$\int_{-1}^{3} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^{3} = f(3) - f(-1) = 5 - (-2) = 7.$$

Đáp án A.

Câu 3. Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Phương pháp giải:

x_0 là tiệm cận đứng của đồ thị y = f(x) khi thỏa mãn một trong các điều kiện sau: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Lời giải chi tiết:

Quan sát bảng biến thiên, thấy $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

Đáp án B.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$; $u_2 = 6$. Giá trị u_5 là

A. 27

B. 54

C. 81

D. 162

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1}$.

Lời giải chi tiết:

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3;\ u_5 = u_1 q^4 = 2.3^4 = 162.$$

Đáp án D.

Câu 5. Trong cuộc thi có 10 thí sinh tham gia, số cách trao một giải nhất, một giải nhì và một giải ba là

A. 10^3

B. 3.10

C. A_{10}^3

D. C_{10}^3

Phương pháp giải:

Áp dụng chỉnh hợp.

Lời giải chi tiết:

Số cách trao một giải nhất, một giải nhì và một giải ba cho 3 trong số 10 thí sinh là A_{10}^3.

Đáp án D.

Câu 6. Bạn Hằng rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Hằng được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

A. 25,75

B. 27,5

C. 31,88

D. 8,125

Phương pháp giải:

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Lời giải chi tiết:

Cỡ mẫu: n = 6 + 6 + 4 + 1 + 1 = 18.

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left(x_9 + x_{10}\right);$$

$$Q_1 = x_5 \in [20;25) \Rightarrow Q_1 = 20 + \frac{\frac{18}{4} - 0}{6}(25-20) = \frac{95}{4};$$

$Q_3 = x_{14} \in [30;35) \Rightarrow Q_3 = 30 + \dfrac{\dfrac{3.18}{4} - 12}{4}(35-30) = \dfrac{225}{8}$;

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \dfrac{225}{8} - \dfrac{95}{4} = 8{,}125$.

Đáp án D.

Câu 7. Phương trình $\log_3(2x-3) = 3$ có nghiệm là

A. 12

B. 15

C. 13

D. 6

Phương pháp giải:

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, điều kiện b > 0.

Lời giải chi tiết:

ĐKXĐ: $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

$\log_3(2x-3) = 3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 3^3 \Leftrightarrow x = 15$.

Đáp án B.

Câu 8. Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông có cạnh là 3a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp S.ABCD là

A. $3a^3\sqrt{2}$

B. $4a^3\sqrt{2}$

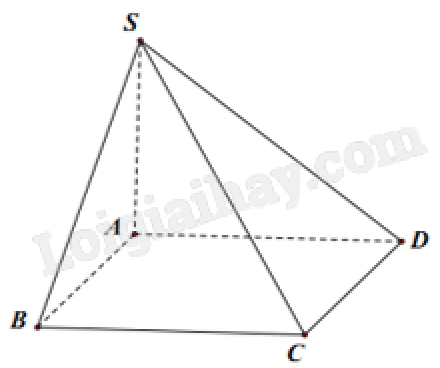
C. $9a^3\sqrt{2}$

D. $12a^3\sqrt{2}$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}Bh$ tính thể tích khối chóp có diện tích đáy là S, chiều cao là h.

Lời giải chi tiết:



$SA \perp (ABCD)$ nên chiều cao khối chóp là SA.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(3a^2\right) = 3a^2\sqrt{2}.$$

Đáp án A.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật với AB = 3, AD = 4, $SA \perp (ABCD)$, SA = 5. Giá trị của $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}$ là

A. 15

B. 12

C. 20

D. 0

Phương pháp giải:

$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải chi tiết:

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, khi đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$.

Đáp án D.

Câu 10. Bác Hùng thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây Keo tai tượng 5 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau:

Đường kính (*cm*)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)
Số cây	5	20	18	7	3

Hãy tìm số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

A. 36,9 cm

B. 33,9 cm

C. 35,9 cm

D. 34,9 cm

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức $\overline{x} = \dfrac{c_1n_1 + c_2n_2 + ... + c_kn_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$.

Lời giải chi tiết:

Đường kính (*cm*)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)
Số cây	5	20	18	7	3
Giá trị đại diện (*cm*)	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5

$$\overline{x} = \frac{27,5.5 + 32,5.20 + 37,5.18 + 42,5.7 + 47,5.3}{5 + 20 + 18 + 7 + 3} \approx 35,9.$$

Đáp án C.

Câu 11. Trong không gian (Oxyz), cho ΔABC có $\overrightarrow{AB} = (4;-1;-5)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-4;-2)$, gọi M là trung điểm BC. Độ dài đoạn AM là

A. $\sqrt{70}$

B. $2\sqrt{70}$

C. $\sqrt{6}$

D. $\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc ba điểm tính $\overrightarrow{AC}$, quy tắc trung điểm tính $\overrightarrow{AM}$. Từ đó, tìm độ dài AM.

Lời giải chi tiết:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4+2;-1-4;-5-2) = (6;-5;-7)$;

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(4+6;-1-5;-5-7\right) = \left(5;-3;-6\right)$.

Suy ra $AM = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{70}$.

Đáp án A.

Câu 12. Trong không gian (Oxyz), cho mặt phẳng (P): 2x – y – z + 4 = 0 và điểm I(2;-3;-1); mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 12$

B. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 24$

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 12$

D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 24$

Phương pháp giải:

Mặt cầu (S) tiếp xúc mặt phẳng (P) nên khoảng cách từ tâm I đến (P) là bán kính mặt cầu.

Lời giải chi tiết:

$R = d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|2.2-(-3)-(-1)+4\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{6}$.

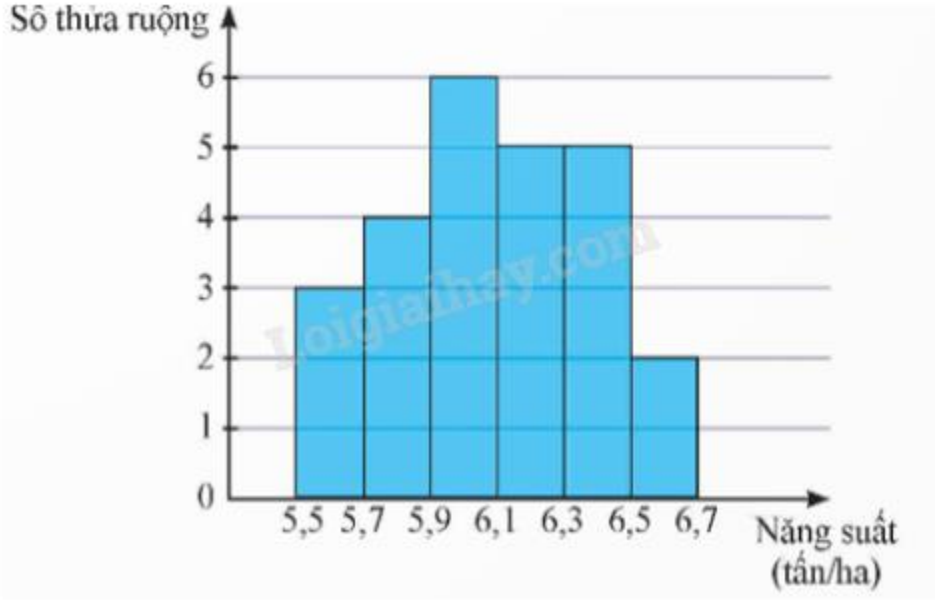
Phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 24$.

Đáp án B.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (4 điểm)

1) ĐĐSĐ	**2) ĐĐSS**	**3) ĐSĐĐ**	**4) ĐSĐS**

Câu 1. Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:



a) Có 25 thửa ruộng đã được khảo sát.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 1,2 (tấn/ha).

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 6,33.

d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 0,086656.

Phương pháp giải:

Lập bảng tần số ghép nhóm từ biểu đồ. Áp dụng công thức tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Số thửa ruộng được khảo sát là: n = 3 + 4 + 6 + 5 + 5 + 2 = 25.

b) Đúng. Từ biểu đồ, ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu như sau:

Năng suất (tấn/ha)	[5,5; 5,7)	[5,7; 5,9)	[5,9; 6,1)	[6,1; 6,3)	[6,3; 6,5)	[6,5; 6,7)
Giá trị đại diện (tấn/ha)	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6
Tần số tương đối	3	4	6	5	5	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho là: R = 6,7 – 5,5 = 1,2 (tấn/ha).

c) Sai. Ta có:

Cỡ mẫu n = 25.

Gọi $x_1;...;x_{25}$ là mẫu số liệu gốc về năng suất của một số thửa ruộng được khảo sát được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_6 + x_7}{2} \in$ [5,7; 5,9). Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 5,7 + \frac{\frac{25}{4} - 3}{4}(5,9 - 5,7) = 5,8625$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{19}+x_{20}}{2} \in$ [6,3; 6,5). Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3 = 6,3 + \frac{\frac{3.25}{4} - (3+4+6+5)}{5}(6,5-6,3) = 6,33$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 6,33 - 5,8625 = 0,4675$.

d) Đúng. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\overline{x} = \frac{3.5,6+4.5,8+6.6,2+5.6,4+2.6,6}{25} = 6,088.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S^2 = \frac{1}{25}\left[3.(5,6)^2+4.(5,8)^2+6.(6,0)^2+5.(6,2)^2+5.(6,4)^2+2.(6,6)^2\right]-(6,088)^2 = 0,086656.$$

Câu 2. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $AD = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Đường cao của hình chóp S.ABCD là SA.

b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, với AH là đường cao của tam giác SAB.

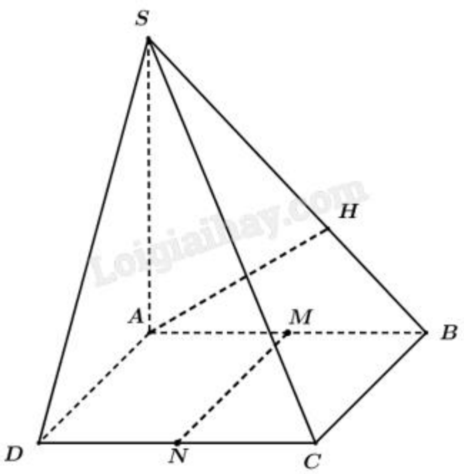
c) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

d) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phương pháp giải:

Áp dụng điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Lời giải chi tiết:



a) Đúng. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABC)$. Do đó SA là đường cao của hình chóp S.ABC.

b) Đúng. Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$, $H \in SB$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB), AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Do đó $d(A;(SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Sai. Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét trong tam giác vuông SAB có AH là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow SA = a.$$

Do đó: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a\sqrt{2}.a = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

d) Sai. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN//BC \\ MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN//(SBC).$$

Do đó $d(MN;SB) = d(MN;(SBC)) = d(M;(SBC)) = \frac{1}{2}d(A;(SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 2 - n \end{cases}, \forall n \geq 2$.

a) $u_2 = 4$.

b) $u_n - n = 2u_{n-1} - (n-1)$.

c) Đặt $v_n = u_n - n$ thì dãy số (v_n) là cấp số nhân.

d) $S_{100} = 2524 + 2^{99}$.

Phương pháp giải:

Thay số vào công thức đã cho.

(v_n) là cấp số nhân khi $v_n = q.v_{n-1}$ (q là hằng số).

Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu của cấp số nhân $S = u_1\frac{1-q^n}{1-q}$.

Lời giải chi tiết:

a) Đúng. Ta có: $u_2 = 2.u_1 + 2 - 2 = 2.2 = 4$.

b) Sai. Ta có: $u_n - n = 2(u_{n-1} - (n-1))$.

c) Đúng. Đặt $v_n = u_n - n$ thì $v_{n-1} = u_{n-1} - (n-1)$. Mà $u_n - n = 2(u_{n-1} - (n-1))$ nên $v_n = 2v_{n-1}$ dãy số (v_n) là cấp số nhân.

d) Đúng. Từ $v_n = 2v_{n-1}$ dãy số (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = 1$, công bội $q = 2$ nên số hạng tổng quát

$v_n = v_1.q^{n-1} = 2^{n-1}$ mà $v_n = u_n - n$ nên $2^{n-1} = u_n - n \Leftrightarrow u_n = 2^{n-1} + n$.

$$S_{100} = \left(2^0 + 2^1 + ... + 2^{99}\right) + (1 + 2 + ... + 100) = \frac{1(1-2^{99})}{1-2} + \frac{(1+100)50}{2} = 2524 + 2^{99}.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’, biết rằng A(1;2;0), A’(1;0;1), B(1;5;1), D’(0;-2;0).

a) Tọa độ vecto $\overrightarrow{AA'}$ là $\overrightarrow{AA'} = (0;-2;1)$.

b) Tọa độ các điểm B’, C là B’(2;1;-1), C(0;3;0).

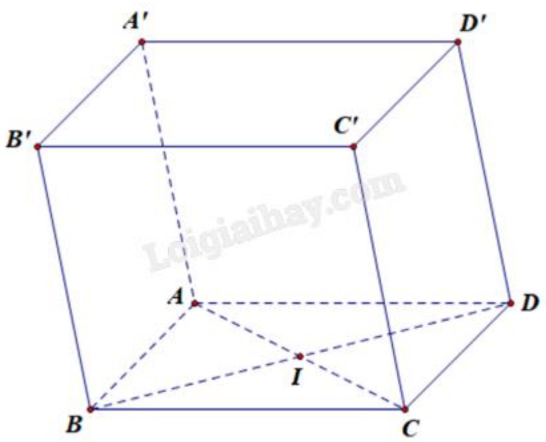
c) $AB = \sqrt{10}$; $C'A = \sqrt{3}$.

d) Đặt $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$. P đạt giá trị nhỏ nhất khi M(1;-2;0).

Phương pháp giải:

Áp dụng biểu thức tọa độ các phép toán trong không gian.

Lời giải chi tiết:



a) Đúng. Tọa độ vecto $\overrightarrow{AA'}$ là $\overrightarrow{AA'} = (1-1;0-2;1-0) = (0;-2;1)$.

b) Sai. $\overrightarrow{AA'} = (0;-2;1) = \overrightarrow{BB'}$; $B(1;5;1) \Rightarrow B'(1;3;2)$.

$\overrightarrow{A'D'} = (-1;-2;-1) = \overrightarrow{BC}$; $B(1;5;1) \Rightarrow C(0;3;0)$.

c) Đúng. Ta có $\overrightarrow{AB}(0;3;1) \Rightarrow AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AA'} = (0;-2;1) = \overrightarrow{CC'}$; $C(0;3;0) \Rightarrow C'(0;1;1) \Rightarrow AC' = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

d) Sai. Ta có:

$P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2$

$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$.

Do đó, P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay $M \equiv I$.

$\overrightarrow{A'D'} = (-1;-2;-1) = \overrightarrow{AD}$; $A(1;2;0) \Rightarrow D(0;0;-1)$.

I là trung điểm $BD \Rightarrow I\left(\frac{1+0}{2};\frac{5+0}{2};\frac{1-1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};0\right)$ hay $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (3 điểm)

1) 481	**2)** 0,2	**3)** 361	**4)** 4,47	**5)** 80	**6)** 3,08

Câu 1. Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật. Giả sử AB = 3,8 m; OA = 2,2 m; OB = 3 m.

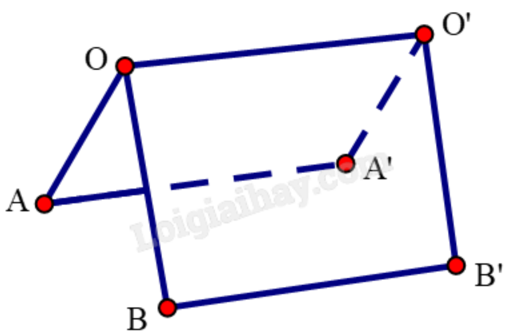
Gọi α là góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mái nhà và $\cos\alpha = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Tính $3m + n^2$?

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc xác định góc nhị diện và định lý cosin cho tam giác để tính.

Lời giải chi tiết:



Giả sử hai mái ngói là hai hình chữ nhật OAA’O’ và OBB’O’. Khi đó:

$\begin{cases} (OAA'O') \cap (OBB'O') = OO' \\ OA \perp OO', OA \subset (OAA'O') \\ OB \perp OO', OB \subset (OBB'O') \end{cases}$ nên AOB là góc phẳng nhị diện $[A, OO', B]$. Vậy $AOB = \alpha$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác OAB ta được:

$$\cos AOB = \cos\alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = \frac{2,2^2 + 3^2 - 3,8^2}{2.2,2.3} = -\frac{1}{22} = \frac{m}{n} \Rightarrow m = -1; n = 22.$$

Vậy $3m + n^2 = -3 + 484 = 481$.

Đáp án: 481.

Câu 2. Trong phép thử T, cho A và B là hai biến cố độc lập nhau. Biết P(A) + P(B) = 1,1 và P(AB) = 0,3. Tính xác suất của biến cố $\overline{A}.\overline{B}$.

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc nhân xác suất cho hai biến cố độc lập, công thức tính xác suất của biến cố đối.

Lời giải chi tiết:

Ta có $P(AB) = 0,3 \Rightarrow P(A).P(B) = 0,3$ (vì A và B độc lập). Suy ra ta có hệ:

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 1,1 \\ P(A).P(B) = 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = 0,5 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,5 \\ P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,4 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} P(A) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,4 \\ P(B) = 0,5 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,5 \end{cases}.$$

Lại có A và B là hai biến cố độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

Do đó $P(\overline{A}.\overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = 0,5.0,4 = 0,4.0,5 = 0,2$.

Đáp án: 0,2.

Câu 3. Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét).

Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Khoảng cách từ máy bay đến ra đa bằng bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Phương pháp giải:

Xác định tọa độ ra đa và máy bay dựa vào dữ liệu đề bài cho. Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm.

Lời giải chi tiết:

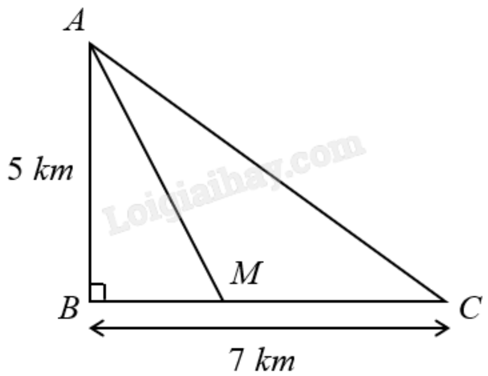
Đổi 80 m = 0,08 km.

Theo giả thiết, ra đa ở vị trí có toạ độ (0;0;0,08), máy bay ở vị trí có tọa độ A(-300;-200;10).

Vậy khoảng cách từ máy bay đến ra đa là: $\sqrt{(-300-0)^2+(-200-0)^2+(10-0,08)^2}\approx 361$ (km).

Đáp án: 361.

Câu 4. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB = 5 km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h.



Vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu ki-lô-mét thì người canh hải đăng đến kho nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Phương pháp giải:

Đặt BM = x. Lập hàm số biểu diễn thời gian người canh hải đăng đến kho rồi tìm x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải chi tiết:

Gọi BM = x (km, $0\le x\le 7$).

Khi đó $AM=\sqrt{x^2+25}$ (km).

Thời gian người đó đi từ A đến M rồi đến C là $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$ (giờ).

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+25}}-\dfrac{1}{6}$.

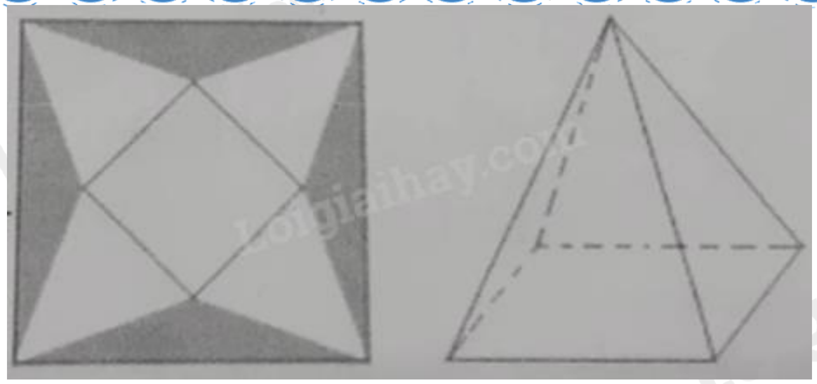
Xét $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 6x=4\sqrt{x^2+25}\Leftrightarrow x=2\sqrt{5}\in\left[0;7\right]$.

$f\left(0\right)=\dfrac{29}{12}$, $f\left(7\right)=\dfrac{\sqrt{74}}{4}$, $f\left(2\sqrt{5}\right)=\dfrac{5\sqrt{5}}{12}+\dfrac{7}{6}$.

Vậy để đến kho nhanh nhất thì $x=2\sqrt{5}\approx 4,47$ (km).

Đáp án: 4,47.

Câu 5. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



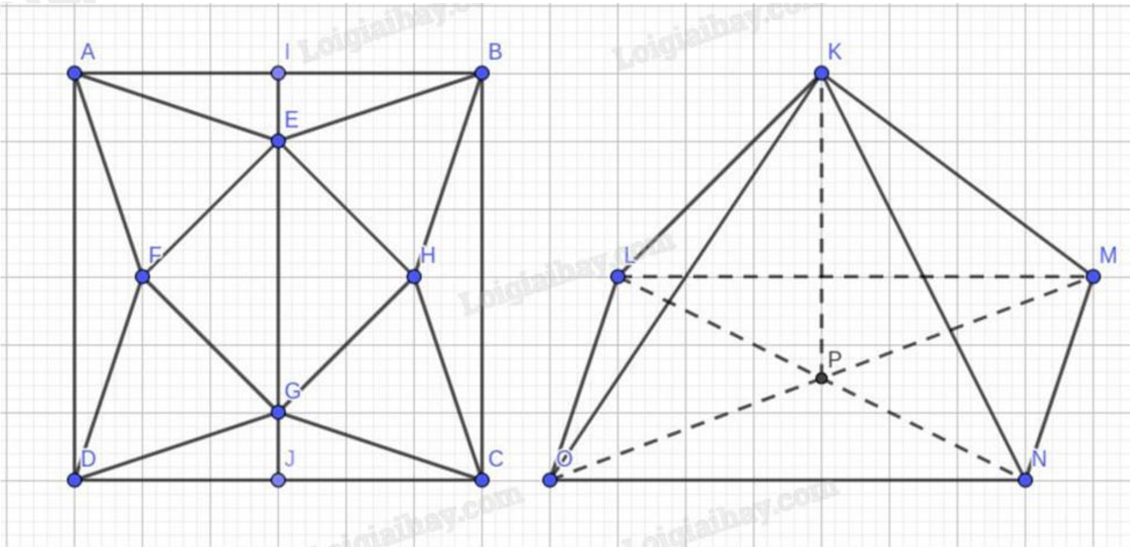
Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên?

Phương pháp giải:

Lập hàm số biểu diễn thể tích khối chóp theo ẩn x. Tìm x để thể tích khối chóp lớn nhất bằng cách ứng dụng đạo hàm, từ đó tính diện tích phần bạt bị cắt.

Lời giải chi tiết:

Ta kí hiệu các điểm như trong hình vẽ.



Có $AI = IB = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$ (m), IJ = BC = 20 (m).

Đặt $EF = FG = GH = HE = x$ (m, x > 0).

$FH = EG = \sqrt{EH^2 + HG^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$ (m).

$EI = GJ = \frac{IJ - EG}{2} = \frac{20 - x\sqrt{2}}{2}$ (m).

Xét tam giác AIE vuông tại I:

$$AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{20 - x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 10\sqrt{2}x + 200} \text{ (m)}.$$

$LN = OM = EG = HF = x\sqrt{2}$ (m), $LP = \frac{LN}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (m).

$$KL = KO = KM = KN = AE = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 10\sqrt{2}x + 200} \text{ (m)}.$$

Xét tam giác KLP vuông tại P:

$$KP = \sqrt{KL^2 - LP^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 10\sqrt{2}x + 200 - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{200 - 10\sqrt{2}x} \text{ (m)}.$$

Điều kiện: $x \le 10\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}.KP.S_{LMNO} = \frac{1}{3}.\sqrt{200 - 10\sqrt{2}x}.x^2 \ \left(m^3\right).$$

Đặt $y = \frac{1}{3}.\sqrt{200 - 10\sqrt{2}x}.x^2$, ta có $y' = \dfrac{-25\sqrt{2}x^2 + 400x}{3\sqrt{200 - 10\sqrt{2}x}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 8\sqrt{2} \end{array}\right.$ (loại x = 0).

Bảng biến thiên:

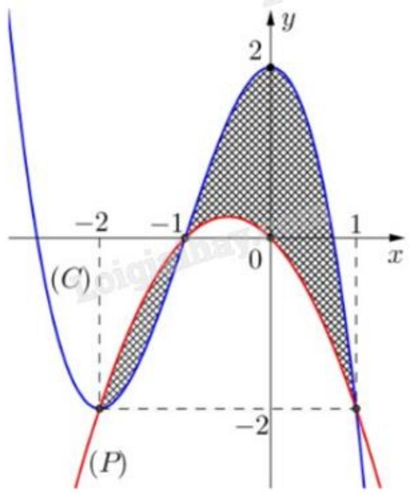
x	0		$8\sqrt{2}$		$10\sqrt{2}$
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	$\frac{256\sqrt{10}}{3}$	$\searrow$	0

Vậy thể tích khối chóp lớn nhất khi $x = 8\sqrt{2}$ (m).

Diện tích tấm bạt bị cắt khi đó là $S = 4S_{AEB} = 4.\frac{1}{2}.EI.AB = 2.\frac{20 - 8\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2}.20 = 80 \ \left(m^2\right)$.

Đáp án: 80.

Câu 6. Biết hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Tính diện tích phần kẻ hình ca-rô của hình vẽ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Phương pháp giải:

Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) để tìm hệ số a của phương trình hoành độ giao điểm. Từ đó, áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ứng dụng tích phân.

Lời giải chi tiết:

Dựa vào đồ thị hàm số đề bài cho ta có:

Parabol (P) đi qua gốc toạ độ O nên hàm số bậc hai có dạng $f(x) = mx^2 + nx$.

Xét hàm số bậc ba $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C), vì đồ thị (C) đi qua điểm (0;2) nên d = 2.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P):

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow a(x+2)(x^2-1) = 0$.

Mặt khác $g(x) = f(x) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + 2 = 0$.

Nên ta có hệ số tự do $-2a = 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Do đó $g(x) - f(x) = -(x+2)(x^2-1)$.

$$S = \int_{-2}^{1} |g(x) - f(x)|\,dx = \int_{-2}^{1} \left|-(x+2)(x^2-1)\right|dx \approx 3,08.$$

Đáp án: 3,08.