

ĐỀ THAM KHẢO THI TUYỂN SINH VÀO 10 – ĐỀ SỐ 5
MÔN TOÁN

Thời gian: 120 phút

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1: (1,5 điểm)

1) Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm sau: $[30;40)$, $[40;50)$, $[50;60)$, $[60;70)$, $[70;80)$, $[80;90)$. Tìm tần số tương đối ghép nhóm.

2) Một hình tròn được chia thành 10 hình quạt như nhau, được đánh số như hình bên và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm.

Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố A: “Mũi tên chỉ vào các số La Mã”.

Tính xác suất của biến cố A.



Phương pháp

1) - Xác định tần số cho các nhóm để lập bảng tần số ghép nhóm.

- Tần số tương đối của nhóm bằng: tần số của nhóm : tổng . 100%.

2) - Xác định không gian mẫu của phép thử, tính số phần tử của không gian mẫu.

- Tính số kết quả thuận lợi của biến cố.

- Xác suất của biến cố = số kết quả thuận lợi của biến cố : số phần tử của không gian mẫu.

Lời giải

1) Lập bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	Tổng
Tần số (n)	5	6	6	4	3	6	N = 30

Tần số tương đối ghép nhóm của của nhóm [50;60) là: $f = \frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%$.

2) Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”. Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là: $W = \{1; II; 3; IV; 5; VI; 7; VIII; 9; X\}$.

Số phần tử của tập hợp W là 10.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: II, IV, VI, VIII, X.

Do đó, có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$; $B = \frac{7}{\sqrt{x}+1} - \frac{12}{(\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x})}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x = \frac{9}{4}$.

2) Rút gọn $M = A - B$.

3) Tìm các giá trị của x sao cho $M^2 < \frac{25}{4}$.

Phương pháp

1) Kiểm tra điều kiện của x. Nếu thỏa mãn, thay $x = \frac{9}{4}$ vào A.

2) Kết hợp các tính chất của căn thức bậc hai để rút gọn biểu thức.

3) Rút gọn P rồi giải bất đẳng thức $M^2 < \frac{25}{4}$, kết hợp điều kiện để tìm x.

Lời giải

1) Thay $x = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn điều kiện) vào A, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}-3} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-3} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1.$$

Vậy khi $x = \frac{9}{4}$ thì $A = -1$.

2) ĐKXD: $x \geq 0$; $x \neq 9$.

$$\begin{aligned} M = A - B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \left[\frac{7}{\sqrt{x}+1} - \frac{12}{(\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x})} \right] = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{7}{\sqrt{x}+1} - \frac{12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 7(\sqrt{x}-3) - 12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x + \sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 21 - 12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x - 6\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$3) M^2 < \frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \right)^2 < \left(\frac{5}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 < 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} - \frac{5}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{2} \right) < 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}-6-5\sqrt{x}-5}{2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}-6+5\sqrt{x}+5}{2(\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\frac{-3\sqrt{x}-11}{2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{7\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\frac{(-3\sqrt{x}-11) \cdot (7\sqrt{x}-1)}{4(\sqrt{x}+1)^2} < 0.$$

$$\text{Vì } 4(\sqrt{x}+1)^2 > 0 \text{ nên để } \frac{(-3\sqrt{x}-11) \cdot (7\sqrt{x}-1)}{4(\sqrt{x}+1)^2} < 0 \text{ thì } (-3\sqrt{x}-11) \cdot (7\sqrt{x}-1) < 0.$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } -3\sqrt{x} \leq 0, \text{ suy ra } -3\sqrt{x}-11 < 0.$$

$$\text{Do đó, để } (-3\sqrt{x}-11) \cdot (7\sqrt{x}-1) < 0 \text{ thì:}$$

$$7\sqrt{x}-1 > 0$$

$$\sqrt{x} > \frac{1}{7}$$

$$x > \frac{1}{49}.$$

Vậy, với $x > \frac{1}{49}$, $x \neq 9$ thì $M^2 < \frac{25}{4}$.

Câu 3: (2,5 điểm)

1) Một trường THCS tổ chức cho 250 người bao gồm giáo viên và học sinh đi tham quan khu du lịch Đảo Ngọc Xanh. Biết giá vé vào cổng của một giáo viên là 80 000 đồng, vé vào cổng của một học sinh là 60 000 đồng. Nhà trường tổ chức đi vào đúng dịp Khai trương nên được giảm giá 5% cho mỗi vé vào cổng, vì vậy nhà trường chỉ phải trả tổng số tiền là 14 535 000 đồng. Hỏi có bao nhiêu giáo viên và học sinh của trường đi tham quan?

2) Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc của xe khách là 20 km/h nên xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100 km.

3) Cho phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$.

Phương pháp

1) Gọi số giáo viên và số học sinh lần lượt là x, y ($0 < x, y < 250$; $x, y \in \mathbb{N}$; đơn vị: người).

Biểu diễn tổng số người tham gia, số tiền mua vé theo hai biến x, y .

Lập hệ phương trình, giải hệ để tìm x, y .

2) Gọi x là số sản phẩm phải làm mỗi ngày theo kế hoạch (sản phẩm, $x \in \mathbb{N}^*$).

Biểu diễn vận tốc, thời gian di chuyển của xe khách và xe du lịch theo x .

Do xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút nên ta lập được phương trình.

Giải phương trình để tìm x , kiểm tra điều kiện và kết luận.

3) Kiểm tra sự tồn tại của x_1, x_2 dựa vào Δ .

Biến đổi biểu thức A và áp dụng định lý Viète: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Lời giải

1) Gọi x là số giáo viên, y là số học sinh của trường tham gia tham quan ($0 < x, y < 250$; $x, y \in \mathbb{N}$; đơn vị: người).

Vì tổng số giáo viên và học sinh tham gia là 250 người nên ta có phương trình: $x + y = 250$ (1).

Số tiền vé của một giáo viên sau khi được giảm là: $80000.95\% = 76000$ (đồng).

Số tiền vé của một học sinh sau khi được giảm là: $60000.95\% = 57000$ (đồng).

Vì nhà trường chỉ phải trả tổng số tiền là 14 535 000 đồng nên ta có phương trình:

$76000x + 57000y = 14535000$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 76000x + 57000y = 14535000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 235 \end{cases}$$

Giải hệ, được $x = 15$ (TM) và $y = 235$ (TM).

Vậy số giáo viên tham gia là 15 người, số học sinh tham gia là 235 người.

2) Đổi: 50 phút = $\frac{5}{6}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe khách là x (km/h, $x > 0$), khi đó vận tốc của xe du lịch là $x + 20$ (km/h).

Thời gian xe khách đi từ A đến B là: $\frac{100}{x}$ (giờ).

Thời gian xe du lịch đi từ A đến B là: $\frac{100}{x + 20}$ (giờ).

Vì xe du lịch đi đến B trước xe khách 50 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 20} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{100.6(x + 20)}{6x(x + 20)} - \frac{100.6x}{6x(x + 20)} = \frac{5x(x + 20)}{6x(x + 20)}$$

$$100.6(x + 20) - 100.6x = 5x(x + 20)$$

$$600x + 12000 - 600x = 5x^2 + 100x$$

$$5x^2 + 100x - 12000 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 40$ (thỏa mãn) và $x = -60$ (loại).

Vậy, vận tốc của xe khách là 40 km/h, vận tốc của xe du lịch là 60 km/h.

3) Xét $ac = 2.(-3) = -6 < 0$ nên phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Viète, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= (x_1 - x_2)^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = 10. \end{aligned}$$

Vậy $A = 10$.

Câu 4: (4 điểm)

1) Một ly đựng đầy nước dạng hình trụ có chiều cao là 15 cm, bán kính đáy bằng 5 cm.

a) Tính thể tích nước chứa trong ly.

b) Người ta thả vào ly 5 viên bi đặc không thấm nước có dạng hình cầu, đường kính mỗi viên bi bằng 3 cm.

Tính thể tích nước tràn ra ngoài ly.

2) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ $OM \perp AB$ tại M, $ON \perp AC$ tại N.

a) Chứng minh bốn điểm O, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $BDM = ODN$.

c) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I, AI cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm của BC.

Phương pháp

1)

a) Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$.

b) Thể tích nước tràn ra ngoài ly bằng thể tích 5 viên bi.

Áp dụng công thức tính thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

2)

a) Chứng minh $\angle AMO = 90^\circ$ và $\angle ANO = 90^\circ$, từ đó suy ra các điểm M, N, D, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b) Chứng minh:

+ $\angle AMO = \angle ANO$ (do $\triangle AMO = \triangle ANO$).

+ $\angle AOM = \angle ADM$ (góc nội tiếp chắn cung AM).

+ $\angle AON = \angle ADN$ (góc nội tiếp chắn cung AN).

Từ đó ta được $\angle ADM = \angle ADN$, suy ra $BDM = ODN$.

c) Qua I, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh:

+ OI là phân giác của $\angle POQ$, suy ra $PI = IQ$ (do $\triangle POQ$ cân tại O).

+ $\frac{PI}{BK} = \frac{QI}{CK}$ (theo hệ quả định lý Thales).

Từ đó suy ra $BK = CK$, hay K là trung điểm của BC.

Lời giải

1)

a) Thể tích nước chứa trong ly là: $V = \pi R^2 h = \pi 5^2 \cdot 15 = 375\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

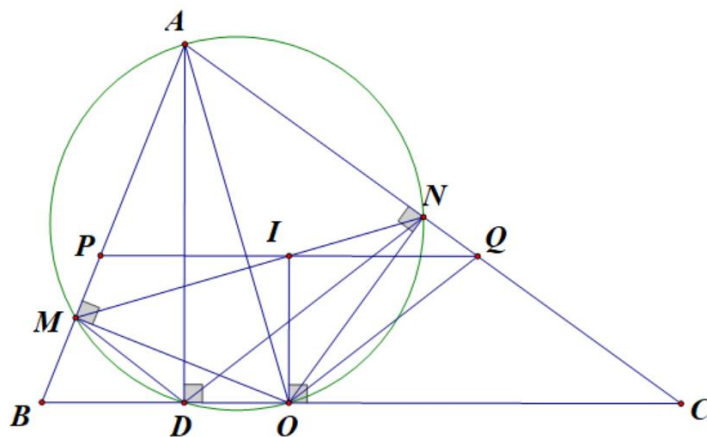
b) Thể tích nước tràn ra ngoài ly bằng thể tích 5 viên bi.

Bán kính viên bi là: $R = \frac{3}{2} \text{ (cm)}.$

Thể tích 1 viên bi là: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích nước tràn ra ngoài ly là: $5V = 5 \cdot \frac{9}{2} \pi = \frac{45}{2} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

2)



a) Ta có:

+ $OM \perp AB$ tại M nên $\angle AMO = 90^\circ$. Do đó, M thuộc đường tròn đường kính AO.

+ $ON \perp AC$ tại N nên $\angle ANO = 90^\circ$. Do đó, N thuộc đường tròn đường kính AO.

+ AD là đường cao của $\triangle ABC$ nên $\angle ADO = 90^\circ$. Do đó, D thuộc đường tròn đường kính AO.

Vậy, bốn điểm M, N, D, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b) Xét $\triangle AMO$ và $\triangle ANO$, có:

AO chung;

$\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ$;

$\angle OAM = \angle OAN$ (OA là đường phân giác trong của $\triangle ABC$).

Suy ra $\triangle AMO = \triangle ANO$ (g.c.g), do đó $\angle AOM = \angle AON$ (1)

Vì các điểm M, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO nên ta có:

$\angle AOM = \angle ADM$ (góc nội tiếp chắn cung AM) (2)

$\angle AON = \angle ADN$ (góc nội tiếp chắn cung AN) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\angle ADM = \angle ADN$.

Do đó $90^\circ - \angle ADM = 90^\circ - \angle ADN$, suy ra $\angle BDM = \angle ODN$.

c) Qua I, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P, Q.

Vì $OI \perp BC$, mà $PQ \parallel BC$ nên $OI \perp PQ$.

Ta có:

+ $\angle OMP = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính OP.

+ Vì $OI \perp PQ$, suy ra $\angle OIP = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn đường kính OP.

Do đó OMPI là tứ giác nội tiếp, suy ra $\angle POI = \angle PMI$ (góc nội tiếp chắn cung PI) (4)

Ta có:

+ $\angle ONQ = 90^\circ$ nên N thuộc đường tròn đường kính OQ.

+ Vì $OI \perp PQ$, suy ra $OIQ = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn đường kính OQ.

Do đó ONQI là tứ giác nội tiếp, suy ra $IOQ + INQ = 180^\circ$; mà $INQ + INA = 180^\circ$ (góc kề bù) nên

$$IOQ = INA \quad (5)$$

Ta có:

+ $INA = AOM$ (góc nội tiếp chắn cung AM).

+ $PMI = AON$ (góc nội tiếp chắn cung AN).

+ $AOM = AON$ (chứng minh trên).

Do đó, $INA = PMI$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $POI = IOQ$, do đó OI là phân giác của POQ .

Mặt khác, $OI \perp PQ$ nên OI vừa là đường cao, vừa là đường phân giác của ΔPOQ .

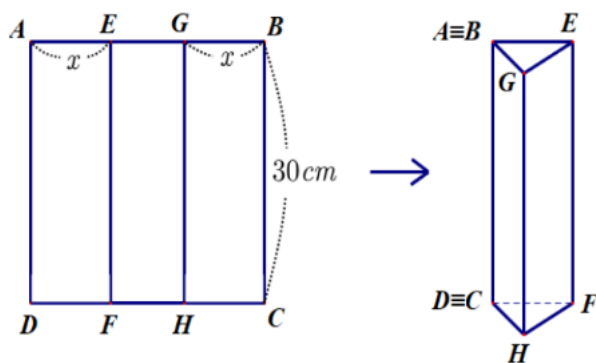
Suy ra ΔPOQ cân tại O và OI cũng là đường trung tuyến của ΔPOQ nên $PI = IQ$.

Vì $PQ \parallel BC$ nên theo hệ quả của định lý Thales: $\frac{PI}{BK} = \frac{AI}{AK} = \frac{QI}{CK}$.

Ta có $\frac{PI}{BK} = \frac{QI}{CK}$, mà $PI = QI$ nên $BK = CK$.

Vậy K là trung điểm của BC.

Câu 5: (0,5 điểm) Cho hình vuông ABCD có cạnh là 30 cm. Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $AE = GB = x$ (cm) và điểm E nằm giữa điểm A và điểm G. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại F; qua G kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại H. Người ta gập hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng cạnh BC như hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



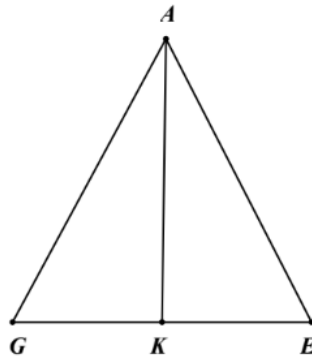
Phương pháp

- Tính thể tích lăng trụ theo x.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương để tìm thể tích lớn nhất của lăng trụ.
- Xét dấu “=” xảy ra để tìm x.

Lời giải

Ta có $AE = GB = x$ ($0 < x < 15$, đơn vị: cm), suy ra $EG = 30 - 2x$ (cm).

Kẻ đường cao AK của $\triangle AGE$.



Vì $\triangle AGE$ cân tại A nên $KE = \frac{EG}{2} = \frac{30-2x}{2} = 15-x$ (cm).

Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle AKE$ vuông tại K, ta có:

$$AK^2 + KE^2 = AE^2$$

$$AK^2 = AE^2 - KE^2$$

$$AK = \sqrt{AE^2 - KE^2}$$

$$AK = \sqrt{x^2 - (15-x)^2}$$

$$AK = \sqrt{30x - 225}.$$

Diện tích đáy lăng trụ là:

$$S_{AGE} = \frac{1}{2} AK.GE = \frac{1}{2} \sqrt{30x - 225}.(30 - 2x) = \sqrt{30x - 225}.(15 - x) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích lăng trụ là:

$$\begin{aligned} V &= S_{AGE}.AD = \sqrt{30x - 225}.(15 - x).30 = \sqrt{15(2x - 15)}.\sqrt{15 - x}.\sqrt{15 - x}.30 \\ &= 30\sqrt{15}.\sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Vì $\triangle AKE$ vuông tại K nên $AE > KE$ hay $x > \frac{15}{2}$, suy ra $2x - 15 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $2x - 15$, $15 - x$, $15 - x$, ta được:

$$3\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq (2x-15) + (15-x) + (15-x)$$

$$3\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq 15$$

$$\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq 5$$

$$(2x-15)(15-x)(15-x) \leq 5^3$$

$$\sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq \sqrt{5^3}$$

$$\sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq 5\sqrt{5}.$$

$$30\sqrt{15} \cdot \sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq 30\sqrt{15} \cdot 5\sqrt{5}$$

$$V \leq 750\sqrt{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $2x - 15 = 15 - x$, suy ra $x = 10$.

Vậy, để thể tích lăng trụ lớn nhất thì $x = 10$.