

ĐỀ THI HỌC KÌ II – Đề số 1

Môn: Toán - Lớp 9

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần I

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,25 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	C	C	C	C	D	D	B	A	A	C	D	B

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành?

A. $y = 2x + 4$.

B. $y = 2x^2$.

C. $y = -2x^2$.

D. $y = -2x + 4$.

Phương pháp

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) nằm dưới trục hoành nếu $a < 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ và $y = -2x + 4$ không nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành.Hàm số $y = 2x^2$ có $a = 2 > 0$ nên đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.Hàm số $y = -2x^2$ có $a = -2 < 0$ nên đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành.

Đáp án C

Câu 2. Phương trình $x^2 - 6x + 1 - 3m = 0$ (với m là tham số) có nghiệm là -1 khi

A. $m = \frac{-4}{3}$.

B. $m = \frac{4}{3}$.

C. $m = \frac{8}{3}$.

D. $m = \frac{-8}{3}$.

Phương pháp

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm là x_0 nếu $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.Thay $x = x_0$ vào phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ để tìm m .

Lời giải

Thay $x = -1$ vào phương trình, ta được:

$$(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 1 - 3m = 0$$

$$1 + 6 + 1 - 3m = 0$$

$$3m = 8$$

$$m = \frac{8}{3}$$

Vậy $m = \frac{8}{3}$.

Đáp án C

Câu 3. Nếu hai số có tổng $S = -5$ và tích $P = -14$ thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

A. $x^2 + 5x + 14 = 0$.

B. $x^2 - 5x + 14 = 0$.

C. $x^2 + 5x - 14 = 0$.

D. $x^2 - 5x - 14 = 0$.

Phương pháp

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

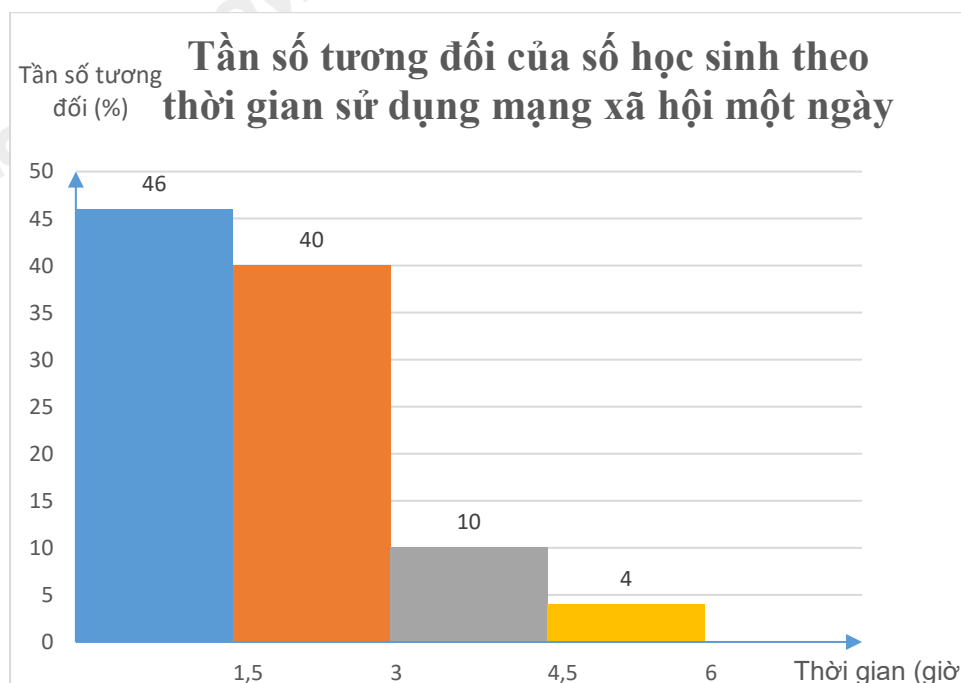
$$x^2 - Sx + P = 0$$

Lời giải

Hai số có tổng $S = -5$ và tích $P = -14$ thì hai số đó là nghiệm của phương trình $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Đáp án C

Câu 4. Khảo sát các bạn học sinh khối 9 của một trường THCS về thời gian sử dụng mạng xã hội trung bình trong một ngày (đơn vị: giờ) thu được kết quả như biểu đồ tần số ghép nhóm sau:



Có bao nhiêu bạn tham gia khảo sát? Biết rằng có 4 bạn sử dụng mạng xã hội từ 4,5 giờ trở lên.

A. 50.

B. 40.

C. 100.

D. 46.

Phương pháp

Xác định tần số tương đối tương ứng với số bạn sử dụng mạng xã hội từ 4,5 giờ trở lên.

Từ đó tính được số bạn tham gia khảo sát theo công thức tìm một số a khi biết giá trị $m\%$ của nó bằng b :

$$a = b : m\%$$

Lời giải

Tần số tương đối tương ứng với số bạn sử dụng mạng xã hội từ 4,5 giờ trở lên là 4%.

Suy ra số bạn tham gia khảo sát là: $4 : 4\% = 100$ (bạn)

Đáp án C

Câu 5. Xét phép thử “Gieo một đồng xu hai lần liên tiếp”. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Phương pháp

Xác định các phần tử của không gian mẫu.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$.

Số phần tử của không gian mẫu là 4.

Đáp án D

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Độ dài của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

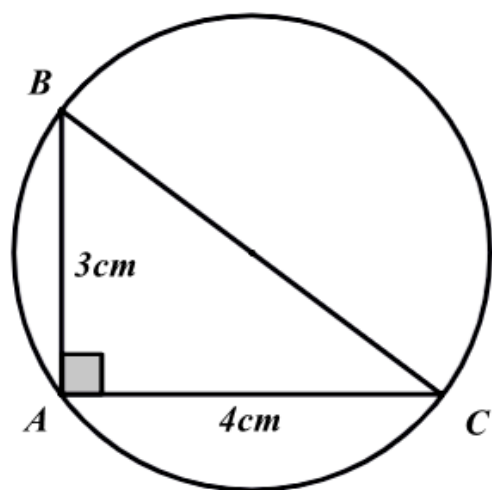
- A. 5 cm . B. 2 cm . C. $3,5 \text{ cm}$. D. $2,5 \text{ cm}$.

Phương pháp

Tính cạnh huyền của tam giác bằng định lý Pythagore.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông bằng một nửa cạnh huyền.

Lời giải



Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ suy ra } BC = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$$

Do đó độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $\frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$.

Đáp án D

Câu 7. Trong các phát biểu sau phát biểu nào **sai**?

- A. Hình vuông nội tiếp đường tròn.
B. Mọi tứ giác đều nội tiếp đường tròn.
C. Hình chữ nhật là tứ giác nội tiếp.
D. Tổng số đo hai góc đối trong tứ giác nội tiếp bằng 180° .

Phương pháp

Dựa vào các kiến thức về tứ giác nội tiếp.

Lời giải

- A. Hình vuông nội tiếp đường tròn là khẳng định đúng.
B. Mọi tứ giác đều nội tiếp đường tròn là khẳng định sai vì không phải tứ giác nào cũng nội tiếp đường tròn.
C. Hình chữ nhật là tứ giác nội tiếp là khẳng định đúng.

D. Tổng số đo hai góc đối trong tứ giác nội tiếp bằng 180° là khẳng định đúng theo tính chất tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp.

Đáp án B

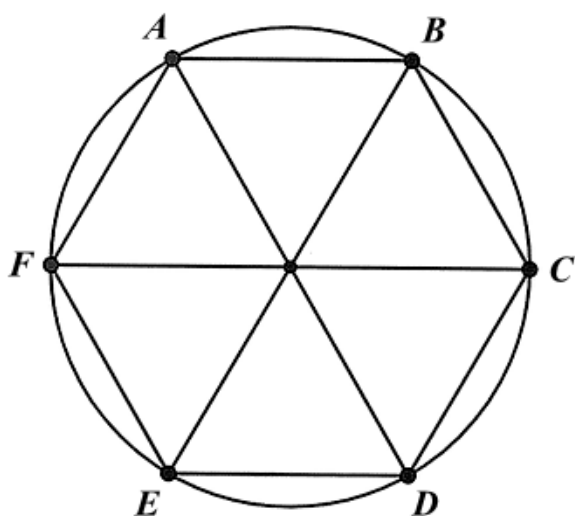
Câu 8. Cho lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn bán kính 5. Độ dài cạnh AB bằng:

- A. 5. B. $5\sqrt{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Phương pháp

Chia hình lục giác đều thành 6 tam giác đều thì ta tính được cạnh của lục giác đều.

Lời giải



Lục giác đều chia thành 6 tam giác đều bằng nhau nên mỗi cạnh của tam giác có độ dài bằng bán kính.

Do đó $AB = 5$ (= bán kính).

Đáp án A

Câu 9. Phép quay bao nhiêu độ sẽ giữ nguyên mọi điểm?

- A. 0° . B. 90° . C. 100° . D. 180° .

Phương pháp

Sử dụng kiến thức: Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.

Lời giải

Vì phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm nên ta chọn đáp án A.

Đáp án A

Câu 10. Cho hình chữ nhật có chiều dài 3cm, chiều rộng 2cm. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài của nó ta được một hình trụ có diện tích xung quanh bằng

- A. 6π (cm^2). B. 8π (cm^2). C. 12π (cm^2). D. 18π (cm^2).

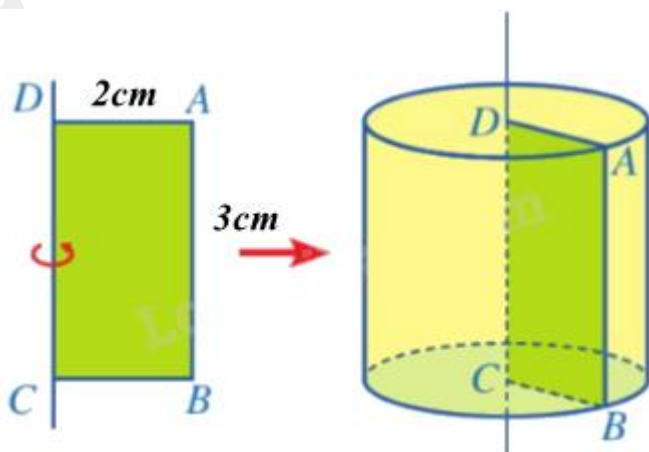
Phương pháp

Xác định chiều cao và bán kính đáy của hình trụ tạo thành.

Sử dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$

Lời giải

Ta có hình vẽ:



Qua hình vẽ ta thấy hình trụ được sinh ra có chiều cao $h = 3 \text{ cm}$ và bán kính đáy $r = 2 \text{ cm}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Đáp án C

Câu 11. Cho hình nón có độ dài đường sinh là 5, bán kính đáy là 3. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

A. 15π .

B. 48π .

C. 39π .

D. 24π .

Phương pháp

Sử dụng công thức tính diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi rl + \pi r^2$.

Lời giải

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi.$$

Đáp án D

Câu 12. Một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu, cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích $9\pi \text{ cm}^2$. Thể tích của hình cầu bằng

A. $927\pi \text{ cm}^3$.

B. $36\pi \text{ cm}^3$.

C. $6\pi \text{ cm}^3$.

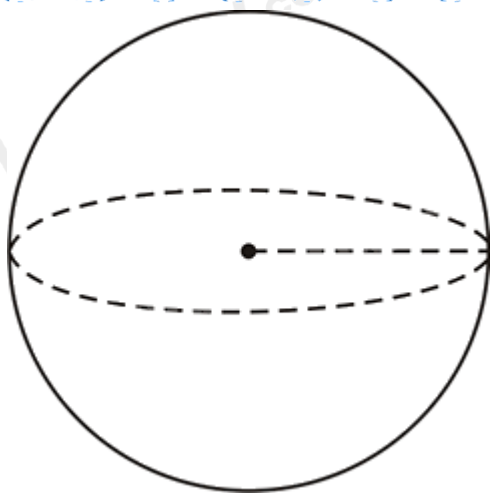
D. $81\pi \text{ cm}^3$.

Phương pháp

Dựa vào diện tích hình tròn ta tính được bán kính của hình cầu: $S = \pi r^2$.

Sử dụng công thức tính thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Lời giải



Vì diện tích của hình tròn là $9\pi\text{cm}^2$ nên ta có: $\pi r^2 = 9\pi$

Suy ra bán kính của hình cầu là: $r = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$

Do đó thể tích của hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi(\text{cm}^3)$

Đáp án B

Phần II

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm

- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,25 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,5 điểm.
- Thí sinh lựa chọn chính xác 04 ý trong 1 câu hỏi được 1 điểm.

Câu 1	Câu 2
a) Đúng	a) Sai
b) Sai	b) Đúng
c) Đúng	c) Đúng
d) Sai	d) Sai

Câu 1. Quãng đường AB dài 90km . Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Thực tế sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB với vận tốc dự định thì ô tô đó nghỉ lại 20 phút. Vì vậy để đến đúng dự định, trên quãng đường còn lại ô tô phải tăng vận tốc thêm 6km/h .

a) Quãng đường còn lại sau khi ô tô nghỉ là 60km .

b) Gọi vận tốc dự định của ô tô là $x(\text{km/h}, x > 0)$ thì thời gian ô tô đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu là $30x(h)$.

c) Vận tốc dự định của ô tô bằng 30km/h .

d) Thời gian ô tô đi hết quãng đường còn lại là $2,5h$.

Phương pháp

a) Tính quãng đường ô tô đã đi $= \frac{1}{3}$. quãng đường AB.

Quãng đường còn lại sau khi ô tô nghỉ = quãng đường AB – quãng đường đã đi.

b) Sử dụng công thức: Thời gian = Quãng đường : Vận tốc

c) Gọi vận tốc dự định của ô tô là $x (km/h, x > 0)$

Biểu diễn vận tốc ô tô đi quãng đường còn lại sau khi ô tô nghỉ theo x

Biểu diễn thời gian ô tô dự định và thực tế ô tô đi.

Vì thời gian dự định và thời gian thực tế ô tô đi là như nhau nên ta lập được phương trình.

Giải phương trình tìm x . Kiểm tra lại điều kiện.

d) Thay giá trị x vừa tìm được vào công thức biểu diễn thời gian ô tô đi hết quãng đường còn lại.

Lời giải

a) Đúng

Quãng đường ô tô đã đi là: $90 \cdot \frac{1}{3} = 30 (km)$

Quãng đường còn lại sau khi ô tô nghỉ là: $90 - 30 = 60 (km)$

b) Sai

Thời gian ô tô đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu là: $\frac{30}{x} (h)$

c) Đúng

Gọi vận tốc dự định của ô tô là $x (km/h, x > 0)$

Vận tốc ô tô đi quãng đường còn lại sau khi ô tô nghỉ là: $x + 6 (km/h)$

Thời gian ô tô dự định đi là: $\frac{90}{x} (h)$

Thực tế:

+) Thời gian ô tô đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu là: $\frac{30}{x} (h)$

+) Thời gian ô tô nghỉ là: $20 \text{ phút} = \frac{1}{3} h$

+) Thời gian ô tô đi quãng đường còn lại là: $\frac{60}{x+6} (h)$

Vì thời gian dự định và thời gian thực tế ô tô đi là như nhau nên ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} = \frac{30}{x} + \frac{1}{3} + \frac{60}{x+6}$$

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+6} - \frac{1}{3} = 0$$

$$60.3.(x+6) - 60.3.x - x(x+6) = 0$$

$$180x + 1080 - 180x - x^2 - 6x = 0$$

$$-x^2 - 6x + 1080 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 30(TM)$; $x_2 = -36(KTM)$.

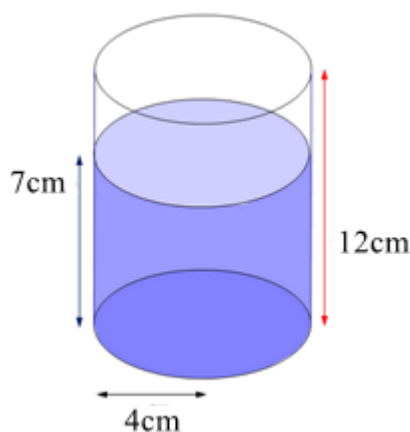
Vậy vận tốc dự định của ô tô là 30km/h.

d) Sai

Thời gian ô tô đi hết quãng đường còn lại là: $\frac{60}{30+6} = \frac{5}{3} \approx 1,67(h) \neq 2,5(h)$

Đáp án: ĐSĐS

Câu 2. Một ly nước có dạng hình trụ với bán kính đáy 4 cm và chiều cao 12 cm. Hiện tại, ly đang chứa nước với mực nước cao 7 cm. (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



a) Chiếc ly có thể chứa tối đa 600 ml nước.

b) Thể tích nước hiện tại trong ly khoảng 352 ml.

c) Nếu thả một viên bi sắt dạng hình cầu có đường kính 5 cm vào ly thì nước không tràn ra ngoài.

d) Nếu thả một viên bi sắt dạng hình cầu có đường kính 6 cm vào ly thì nước sẽ tràn ra ngoài.

Phương pháp

a) Lượng nước có thể chứa tối đa chính là thể tích của ly nước: $V = \pi r^2 h$.

b) Tính thể tích nước trong ly: $V = \pi r^2 h$ (h là chiều cao mực nước)

c, d) Tính thể tích viên bi sắt: $V_{bi} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Lời giải

a) Sai

Lượng nước có thể chứa tối đa chính là thể tích của ly nước.

Chiếc ly có thể chứa tối đa lượng nước là: $V = \pi r^2 h = 3,14.4^2.12 \approx 603(cm^3) = 603(ml)$

b) Đúng

Thể tích nước hiện tại trong ly là: $V_{nc} = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 7 \approx 352 (cm^3) = 352 (ml)$

c) Đúng

Bán kính viên bi sắt là: $\frac{5}{2} = 2,5 (cm)$

Thể tích viên bi sắt là: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,5^3 \approx 65 (cm^3)$

Khi đó thể tích nước và viên bi là: $352 + 65 = 417 (cm^3)$

Vì $417 cm^3 < 603 cm^3$ nên nước không tràn ra ngoài.

d) Sai

Bán kính viên bi sắt là: $\frac{6}{2} = 3 (cm)$

Thể tích viên bi sắt là: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3 \approx 113 (cm^3)$

Khi đó thể tích nước và viên bi là: $352 + 113 = 465 (cm^3)$

Vì $465 cm^3 < 603 cm^3$ nên nước không tràn ra ngoài.

Đáp án: SDDĐS

Phần III

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được **0,5 điểm**)

Câu	1	2	3	4
Chọn	0	200	6	4,7

Câu 1. Phương trình $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-9}{x^2-5x+6}$ ($x \neq 2; x \neq 3$) có bao nhiêu nghiệm?

Phương pháp

Đưa phương trình về phương trình bậc hai một ẩn.

Tính Δ để xác định số nghiệm.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-9}{x^2-5x+6}$

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-9}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{2x(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{5(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-9}{(x-2)(x-3)}$$

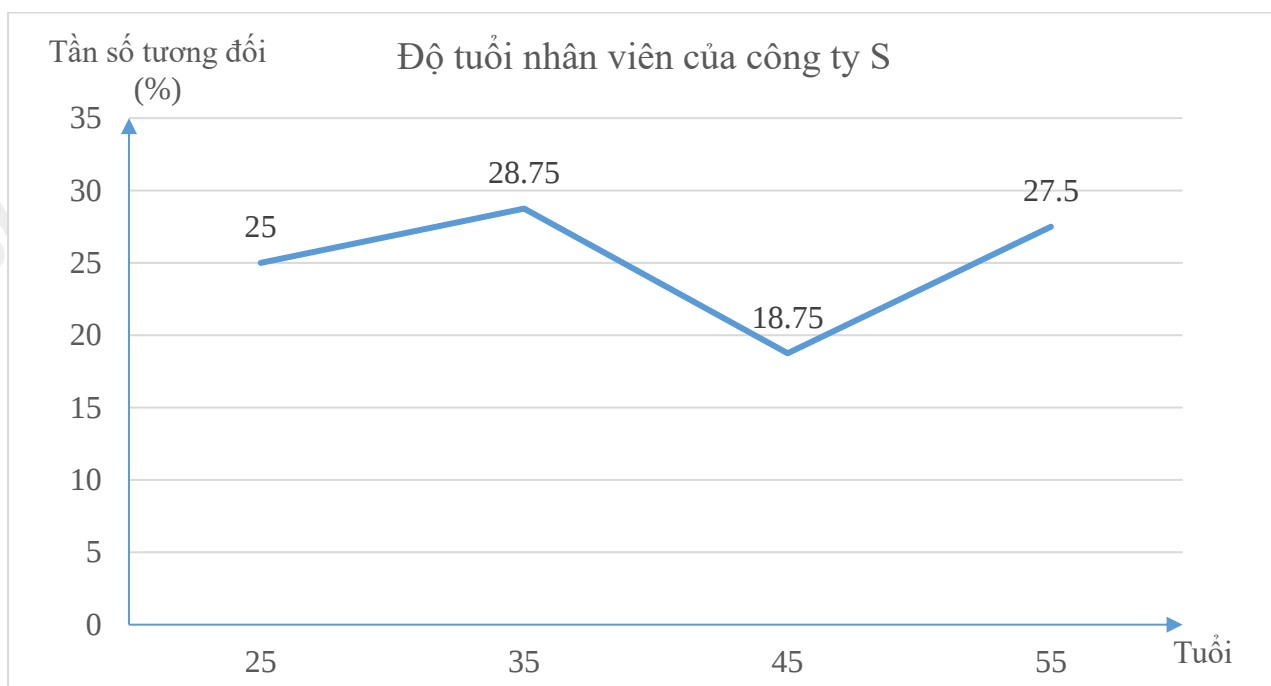
$$2x^2 - 6x - 5x + 10 + 9 = 0$$

$$2x^2 - 11x + 19 = 0$$

Ta có: $\Delta = (-11)^2 - 4.2.19 = -31 < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Đáp án: 0

Câu 2. Khảo sát độ tuổi nhân viên của công ty S được chia ra làm 4 nhóm chính: từ 20 tuổi đến dưới 30 tuổi, từ 30 tuổi đến dưới 40 tuổi, từ 40 tuổi đến dưới 50 tuổi và từ 50 tuổi đến dưới 60 tuổi và kết quả được biểu diễn qua biểu đồ đoạn thẳng như hình vẽ dưới đây. Biết tổng số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 40 tuổi là 430 người. Tính số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 30 tuổi.



Phương pháp

Xác định tần số tương đối tương ứng với số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 40 tuổi.

Ta tính được tổng số nhân viên của công ty S.

Từ đó tính được số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 30 tuổi.

Lời giải

Tần số tương đối của số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 40 tuổi là:

$$25\% + 28,75\% = 53,75\%.$$

Vì tổng số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 40 tuổi là 430 người nên 430 ứng với 53,75%.

Do đó số nhân viên của công ty S là: $430 : 53,75\% = 800$ (người)

Vậy số nhân viên có độ tuổi từ 20 đến dưới 30 tuổi là: $800 \cdot 25\% = 200$ người.

Đáp án: 200

Câu 3. Một nhóm bạn có 4 bạn gồm 2 bạn nam là Hiếu, An và hai bạn nữ là Linh, Ngọc. Chọn ngẫu nhiên 2 bạn để tham gia lao động. Số phần tử của không gian mẫu bằng bao nhiêu?

Phương pháp

Liệt kê các phần tử của không gian mẫu.

Lời giải

Không gian mẫu “Chọn ngẫu nhiên 2 bạn để tham gia lao động” là:

$$\Omega = \{(\text{Hiếu}, \text{An}), (\text{Hiếu}, \text{Linh}), (\text{Hiếu}, \text{Ngọc}), (\text{An}, \text{Linh}), (\text{An}, \text{Ngọc}), (\text{Linh}, \text{Ngọc})\}$$

Vậy số phần tử của không gian mẫu là 6.

Đáp án: 6

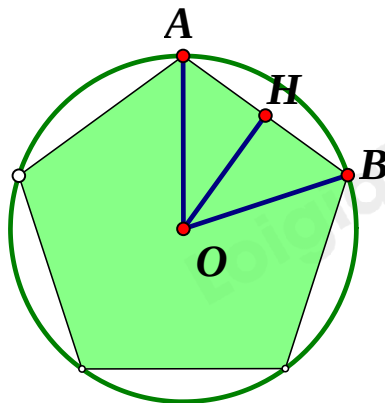
Câu 4. Cạnh của một ngũ giác đều nội tiếp đường tròn bán kính 4cm (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là bao nhiêu cm?

Phương pháp

Tính số đo mỗi góc ở tâm ứng với một cạnh: $\frac{360^\circ}{n}$ (với n là số cạnh của đa giác) suy ra số đo $\angle AOH$.

Áp dụng tỉ số lượng giác vào tam giác $\triangle AOH$ để tính AH , suy ra AB .

Lời giải



Giả sử ta có tam giác OAB như hình vẽ với O là tâm của ngũ giác đều.

Khi đó tam giác OAB cân tại O.

Kẻ $OH \perp AB$, khi đó OH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến và đường phân giác của tam giác OAB.

$$\text{Do đó } AH = \frac{1}{2}AB, AOH = \frac{1}{2}AOB.$$

Ta có mỗi góc ở tâm ứng với mỗi cạnh của ngũ giác đều là:

$$AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

$$\text{Suy ra } AOH = \frac{1}{2}AOB = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\text{Xét } \triangle AOH \text{ vuông tại } H \text{ có: } \sin AOH = \frac{AH}{AO}$$

$$\text{Suy ra } AH = AO \cdot \sin AOH = 4 \cdot \sin 36^\circ$$

$$\text{Do đó } AB = 2AH = 2 \cdot 4 \sin 36^\circ \approx 4,7 \text{ (cm)}$$

Đáp án: 4,7

Phần IV

Câu 1 (1 điểm). a) Tìm a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $M(\sqrt{2}; 2)$.

b) Cho phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $M = (1 - 25x_1)x_1 - x_2(25x_2 - x_1 - 1)$.

Phương pháp

a) Thay toạ độ của điểm M vào hàm số để tìm a.

b) Dùng $\Delta = b^2 - 4ac$ để xác định số nghiệm của phương trình.

$$\text{Tính tổng và tích của hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ theo định lí Viète: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Biến đổi biểu thức M để xuất hiện tổng và tích của hai nghiệm.

Lời giải

a) Để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua $M(\sqrt{2}; 2)$ thì

$$2 = a.(\sqrt{2})^2$$

$$2 = a.2$$

$$a = 1$$

Vậy với $a = 1$ thì đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua $M(\sqrt{2}; 2)$.

b) Xét phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$ có: $\Delta = (-7)^2 - 4.12 = 49 - 48 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-(-7)}{1} = 7 \\ P = x_1 x_2 = \frac{12}{1} = 12 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= (1 - 25x_1)x_1 - x_2(25x_2 - x_1 - 1) \\ &= x_1 - 25x_1^2 - 25x_2^2 + x_1x_2 + x_2 \\ &= -25x_1^2 - 25x_2^2 - 50x_1x_2 + 50x_1x_2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 \\ &= -25(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 51x_1x_2 + (x_1 + x_2) \\ &= -25(x_1 + x_2)^2 + 51x_1x_2 + (x_1 + x_2) \\ &= -25.7^2 + 51.12 + 7 \\ &= -606 \end{aligned}$$

Vậy $M = -606$

Câu 2 (1,5 điểm). Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M nằm trên nửa đường tròn ($M \neq A; B$). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $CAM = ODM$.

c) Gọi P là giao điểm CD và AB; E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh $PA.PO = PC.PM$ và E, F, P thẳng hàng.

Phương pháp

a) Chứng minh $\triangle CAO$ và $\triangle CMO$ cùng thuộc đường tròn đường kính CO.

Do đó A, C, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính CO hay tứ giác ACMO nội tiếp đường tròn đường kính CO.

b) Chứng minh $CAM = ABM$

Chứng minh tứ giác DMOB nội tiếp nên $ABM = ODM$.

Suy ra $CAM = ODM$.

c) **Chứng minh $PA.PO = PC.PM$**

Chứng minh $\triangle PAC \sim \triangle PMO$ (g.g) suy ra $PA \cdot PO = PC \cdot PM$.

Chứng minh E, F, P thẳng hàng

Sử dụng kiến thức về đường trung trực của đoạn thẳng để chứng minh C là trung điểm của AF, D là trung điểm của BE.

Chứng minh $\frac{PC}{PD} = \frac{CF}{DE}$

Giả sử E' là giao điểm của PF và BD.

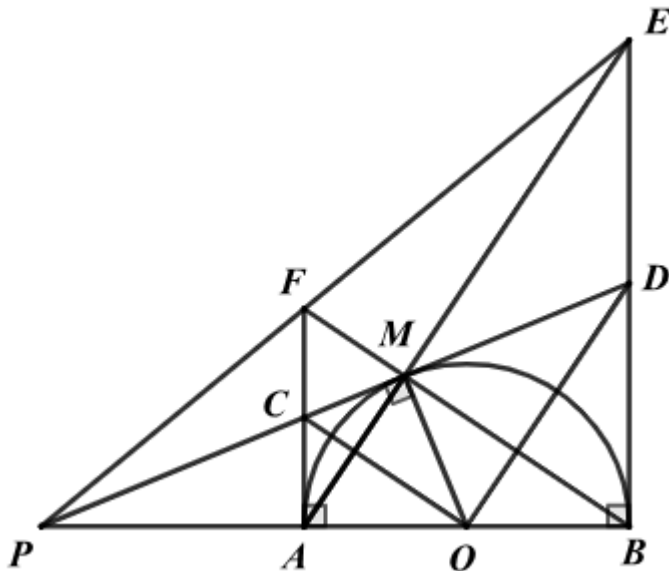
Chứng minh $\frac{PC}{PD} = \frac{CF}{DE'}$ (hai cặp cạnh tương ứng) (6)

Suy ra chứng minh được $BD = DE'$.

Do đó D là trung điểm của BE' nên E trùng với E'.

Vậy E, F, P thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì AC và MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\angle CAO = 90^\circ, \angle CMO = 90^\circ$.

Xét $\triangle CAO$ vuông tại A ($\angle CAO = 90^\circ$) nên $\triangle CAO$ nội tiếp đường tròn đường kính CO, suy ra C, A, O thuộc đường tròn đường kính CO.

Xét $\triangle CMO$ vuông tại M ($\angle CMO = 90^\circ$) nên $\triangle CMO$ nội tiếp đường tròn đường kính CO, suy ra C, M, O thuộc đường tròn đường kính CO.

Do đó A, C, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính CO hay tứ giác ACMO nội tiếp đường tròn đường kính CO.

b) Ta có: $\angle CAM + \angle MAB = \angle CAB = 90^\circ$ (1)

Vì $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\triangle AMB$ vuông tại M, suy ra $\angle MAB + \angle ABM = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle CAM = \angle ABM$ (3)

Xét $\triangle DMO$ vuông tại M ($\angle DMO = 90^\circ$) nên D, M, O thuộc đường tròn đường kính OD.

Xét $\triangle DBO$ vuông tại B ($\angle DBO = 90^\circ$) nên D, B, O thuộc đường tròn đường kính OD.

Do đó D, M, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OD hay tứ giác DMOB nội tiếp đường tròn đường kính OD.

Do đó $\angle ABM = \angle ODM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OM) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle CAM = \angle ODM$.

c) **Chứng minh $PA \cdot PO = PC \cdot PM$**

Xét $\triangle PAC$ và $\triangle PMO$ có:

$\angle P$ chung

$$\angle PAC = \angle PMO (= 90^\circ)$$

suy ra $\triangle PAC \sim \triangle PMO$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{PA}{PC} = \frac{PM}{PO} \text{ (tỉ lệ các cặp cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Suy ra } PA \cdot PO = PC \cdot PM.$$

Chứng minh E, F, P thẳng hàng

Vì CA và CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) nên $CA = CM$, do đó C thuộc đường trung trực của AM.

OA = OM nên O thuộc đường trung trực của AM.

Do đó OC là đường trung trực của AM, hay $OC \perp AM$.

Mà $BM \perp AM$ (do $\angle AMB$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $OC \parallel BM$ hay $OC \parallel BF$.

Mà O là trung điểm của AB nên C là trung điểm của AF.

Chứng minh tương tự, ta được D là trung điểm của BE.

Vì $AC \perp AB, BD \perp AB$ (hai tiếp tuyến của đường tròn) nên $AC \parallel BD$ suy ra $\triangle PAC \sim \triangle PBD$ (định lý hai tam giác đồng dạng)

$$\text{Do đó } \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DE} \text{ (vì C là trung điểm của AF, D là trung điểm của BE) (5)}$$

Giả sử E' là giao điểm của PF và BD.

Vì $AC \parallel BD$ nên $CF \parallel DE'$.

suy ra $\triangle PCF \sim \triangle PDE'$ (định lý hai tam giác đồng dạng)

$$\text{Do đó } \frac{PC}{PD} = \frac{CF}{DE'} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng) (6)}$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } \frac{CF}{DE} = \frac{CF}{DE'} \text{ hay } DE = DE' \text{ nên } BD = DE'.$$

Do đó D là trung điểm của BE' . Mà D là trung điểm của BE nên E trùng với E' .

Vậy E, F, P thẳng hàng.

Câu 3 (0,5 điểm). Một cốc thủy tinh đựng đầy nước có chiều cao 10cm và thể tích $90\pi\text{cm}^3$. Người ta thả vào cốc một viên bi sắt hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy cốc nước, viên bi sắt ngập toàn bộ trong nước. Tính lượng nước bị tràn ra ngoài. (lấy $\pi \approx 3,14$)



Phương pháp

Sử dụng công thức tính thể tích hình trụ để tính bán kính đáy: $V_T = \pi r^2 h$.

Sử dụng công thức tính thể tích hình cầu để tính lượng nước bị tràn ra ngoài (vì thể tích viên bi bằng thể tích nước bị tràn ra ngoài): $V_C = \frac{4}{3} \pi r^3$

Lời giải

Ta có thể tích của cốc thủy tinh là: $V_T = \pi r^2 h$ hay $90\pi = \pi r^2 \cdot 10$

$$\text{suy ra } r^2 = \frac{90\pi}{10\pi} = 9 \text{ nên } r = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$$

Vì bán kính viên bi sắt bằng bán kính đáy cốc nên thể tích viên bi sắt là:

$$V_C = \frac{4}{3} \pi r^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3 = 113,04(\text{cm}^3)$$

Vì thể tích viên bi sắt bằng lượng nước bị tràn ra ngoài nên lượng nước bị tràn ra ngoài khoảng $113,04\text{cm}^3$.