

ĐỀ THI HỌC KÌ II – Đề số 2

Môn: Toán học - Lớp 12

Chương trình GDPT 2018

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



 Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết học kì II của chương trình sách giáo khoa Toán 12.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dần trải tất cả các chương học kì II – chương trình Toán 12.

Phần I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

- A.** x^2+1+C **B.** x^2+x+C
C. x^2+C **D.** $2x+C$

Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $\int f(x)dx = F(x) + C$ **B.** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C$ **D.** $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\int \cos x dx = \sin x + C$
- B.** $\int \cos x dx = -\sin x + C$
- C.** $\int \cos x dx = -\cos x + C$
- D.** $\int \cos x dx = \frac{1}{2} \cos^2 x + C$

Câu 4. Cho $\int_2^3 f(x)dx = 1$ và $\int_2^3 g(x)dx = 4$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

- A.** 5 **B.** 3
C. -3 **D.** 4

Câu 5. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A.** $S = \int_0^1 (x^2 + 1) dx$
- B.** $S = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx$
- C.** $S = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$
- D.** $S = \pi \int_0^1 |x^2 - 1| dx$

Câu 6. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (P): $x - y + z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1 = (-1; 1; 1)$

B. $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$

C. $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$

D. $\vec{n}_4 = (1; 1; -1)$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận vecto $\vec{u} = (2; 3; 4)$ làm vecto chỉ phương. Phương trình tham số của d là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

B.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

C.
$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

A. $I(1; 4; -2); R = 3$

B. $I(-1; -4; 2); R = 3$

C. $I(1; 4; -2); R = 9$

D. $I(-1; -4; 2); R = 9$

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 3x - 4y + 5 = 0$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Tính giá trị $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{11}{15}$

B. $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

C. $\cos \alpha = -\frac{11}{15}$

D. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

Câu 10. Trong không gian Oxyz, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

A. $M_1(3; 1; -1)$

B. $M_2(2; -3; 1)$

C. $M_3(1; 3; -1)$

D. $M_4(-3; -1; 1)$

Câu 11. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,2$. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Câu 12. Gieo con xúc xắc 1 lần. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt 2 chấm. B là biến cố xuất hiện mặt chẵn. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Phần II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu 1, câu 2. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π .

a) Bán kính đường tròn (C) là $r = 5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c) Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 2. Lớp 11A1 có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Nhảy, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Nhảy. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố sau:

A: “Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh”.

B: “Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Nhảy”.

a) $P(A) = \frac{5}{10}$.

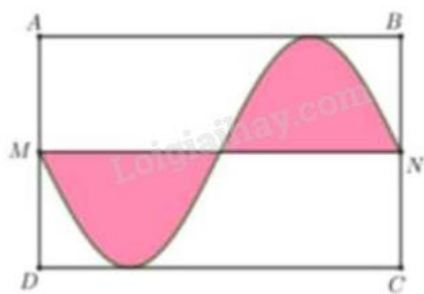
b) $P(B) = \frac{7}{20}$.

c) $P(A|B) = 0,75$.

d) Xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ Nhảy, biết học sinh đó tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh là 0,48.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

Câu 1. Một mảnh đất hình chữ nhật ABCD được quy hoạch như hình bên. Biết đường cong là đường hình sin của hàm số dạng $y = a \sin(bx)$. Biết $AB = 2\pi$ (m) và $AD = 4$ (m). Phần tô đậm (giới hạn bởi đường cong và đoạn MN) được sử dụng để trồng hoa. Tính diện tích phần còn lại của mảnh vườn (đơn vị: m^2 , làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 2. Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: “Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết

cho 3 thì bác chọn chuông I. Nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuông II. Sau đó, từ chuông đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà”. Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$ ($0 \leq t \leq 4$). Kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

Câu 4. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$ đồng thời thuộc mặt cầu có $(S): (x - 32)^2 + (y - 50)^2 + (z - 10)^2 = 109$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu vuông góc của tâm I mặt cầu trên mặt sân. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J bằng bao nhiêu?



Phần IV: Tự luận. Thí sinh trình bày lời giải từ câu 1 đến câu 3.

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Trong không gian tọa độ (Oxyz), cho điểm $M(1; 2; -2)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 3z + 1 = 0$. Phương

trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + bt \\ z = -2 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Khi đó giá trị của biểu thức $P = b^2 + c^2$ là bao nhiêu?

Câu 3. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ Oxyz cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2,5; 15)$ và $(21; 27,5; 10)$. Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.



----- Hết -----

**Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)**

1) B	2) C	3) A	4) A	5) A	6) B
7) D	8) A	9) D	10) A	11) B	12) B

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là

A. $x^2 + 1 + C$

B. $x^2 + x + C$

C. $x^2 + C$

D. $2x + C$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lũy thừa $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Lời giải chi tiết:

$$\int (2x+1)dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = x^2 + x + C.$$

Đáp án B.**Câu 2.** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C$

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$

Phương pháp giải:

Áp dụng định nghĩa nguyên hàm.

Lời giải chi tiết:

Với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$ và $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Vậy A đúng.

Ta có: $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Vậy B, D đúng, C sai.

Đáp án C.**Câu 3.** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos x dx = \sin x + C$

B. $\int \cos x dx = -\sin x + C$

C. $\int \cos x dx = -\cos x + C$

D. $\int \cos x dx = \frac{1}{2} \cos^2 x + C$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lượng giác.

Mặt phẳng (P): $x - y + z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$.

Đáp án B.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (2; 3; 4)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình tham số của d là

A.
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

B.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

C.
$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Phương pháp giải:

Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ có phương trình là
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lời giải chi tiết:

d đi qua điểm $M(1;1;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 4)$ có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Đáp án D.

Câu 8. Trong không gian Oxyz, xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

A. $I(1;4;-2); R = 3$

B. $I(-1;-4;2); R = 3$

C. $I(1;4;-2); R = 9$

D. $I(-1;-4;2); R = 9$

Phương pháp giải:

Mặt cầu phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

Lời giải chi tiết:

Mặt cầu phương trình $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm $I(1;4;-2)$, bán kính $R = 3$.

Đáp án A.

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ và mặt phẳng (Q): $3x - 4y + 5 = 0$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Tính giá trị $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{11}{15}$

B. $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

C. $\cos \alpha = -\frac{11}{15}$

D. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

Phương pháp giải:

Hai mặt phẳng (P), (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}, \vec{n}'$ có $\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$.

Lời giải chi tiết:

Vectơ pháp tuyến của (P), (Q) lần lượt là $\vec{n} = (1; 2; 2)$ và $\vec{n}' = (3; -4; 0)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{1}{3}.$$

Đáp án D.

Câu 10. Trong không gian Oxyz, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

A. $M_1(3; 1; -1)$

B. $M_2(2; -3; 1)$

C. $M_3(1; 3; -1)$

D. $M_4(-3; -1; 1)$

Phương pháp giải:

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình của d, nếu tìm được một giá trị t thỏa mãn hệ phương trình thì điểm đó thuộc d.

Lời giải chi tiết:

Với $M_1(3; 1; -1)$, ta có
$$\begin{cases} 3 = 3 + 2t \\ 1 = 1 - 3t \\ -1 = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0. \text{ Vậy } M_1(3; 1; -1) \in d.$$

Đáp án A.

Câu 11. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,2$. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Lời giải chi tiết:

Áp dụng công thức: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$

Đáp án B.

Câu 12. Gieo con xúc xắc 1 lần. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt 2 chấm. B là biến cố xuất hiện mặt chẵn. Xác suất $P(A|B)$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Lời giải chi tiết:

Vì $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}$.

Áp dụng công thức: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Đáp án B.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (2 điểm)

1) ĐĐSS	2) SSĐĐ
---------	---------

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π .

a) Bán kính đường tròn (C) là $r = 5$.

b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c) Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1;3;1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Phương pháp giải:

a) Từ diện tích đường tròn, tìm bán kính.

b) Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

c) H là tâm đường tròn (C) nên H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Lập phương trình đường thẳng IH, mà H thuộc (P) nên lập hệ phương trình tìm tọa độ điểm H.

d) Áp dụng định lý Pythagore tìm bán kính mặt cầu rồi lập phương trình mặt cầu.

Lời giải chi tiết:

a) **Đúng.** Đường tròn (C) có diện tích là 25π nên bán kính là $r = 5$.

b) **Đúng.** $d(I;(P)) = \frac{|-1-2.2+2.(-1)-2|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}} = 3$.

c) Sai. H là tâm đường tròn (C) nên H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

$$\text{Phương trình đường thẳng IH là: } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$$

Vì H thuộc IH và mặt phẳng (P) nên tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(0; 0; 1).$$

d) Sai. Bán kính R của mặt cầu là $R^2 = r^2 + IH^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + IH^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm I(1;-2;1) bán kính $R = \sqrt{34}$ là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$$

Câu 2. Lớp 11A1 có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Nhảy, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Nhảy. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố sau:

A: “Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh”.

B: “Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Nhảy”.

a) $P(A) = \frac{5}{10}$.

b) $P(B) = \frac{7}{20}$.

c) $P(A|B) = 0,75$.

d) Xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ Nhảy, biết học sinh đó tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh là 0,48.

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. Có 25 trong tổng số 45 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh nên $P(A) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

b) Sai. Có 16 trong tổng số 45 học sinh tham gia câu lạc bộ Nhảy nên $P(B) = \frac{16}{45}$.

c) Đúng. Xác suất chọn được học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là $P(A \cap B) = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$.

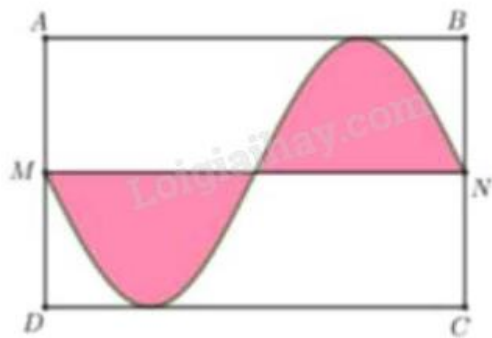
Ta có $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{16}{45}} = 0,75$.

d) Đúng. Ta có $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{5}{9}} = 0,48$.

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (2 điểm)

1) 17,1	2) 0,49	3) 40	4) 3
---------	---------	-------	------

Câu 1. Một mảnh đất hình chữ nhật ABCD được quy hoạch như hình bên. Biết đường cong là đường hình sin của hàm số dạng $y = a \sin(bx)$. Biết $AB = 2\pi$ (m) và $AD = 4$ (m). Phần tô đậm (giới hạn bởi đường cong và đoạn MN) được sử dụng để trồng hoa. Tính diện tích phần còn lại của mảnh vườn (đơn vị: m^2 , làm tròn đến hàng phần chục).



Phương pháp giải:

Quan sát biên độ và chu kì của đồ thị để tìm hệ số a, b . Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân.

Lời giải chi tiết:

Gắn trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của MN, đoạn thẳng ON nằm trên trục Ox.

Hàm số có biên độ là $a = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Hàm số có chu kì 2π nên $2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1$.

Giả sử $b = 1$, ta có $y = 2 \sin x$. Với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$ (thỏa mãn đồ thị).

Giả sử $b = -1$, ta có $y = -2 \sin x$. Với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$ (không thỏa mãn đồ thị).

Do đó, hàm số $y = a \sin(bx)$ đề bài cho là $y = 2 \sin x$.

Diện tích phần trồng hoa là:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |2 \sin x| dx = 2 \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx + 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích hình chữ nhật ABCD là $AB \cdot AD = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần còn lại của mảnh vườn là:

$$S = 8\pi - 8 \approx 17,1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Đáp án: 17,1.

Câu 2. Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: “Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng I. Nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà”. Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức xác suất toàn phần: $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$.

Lời giải chi tiết:

A: “Bắt được con gà mái”.

B: “Gà được bắt ở chuồng I”, $\bar{B}$ là biến cố “Gà được bắt ở chuồng II”.

Nếu số chấm chia hết cho 3 (3 chấm hoặc 6 chấm) thì bác chọn chuồng I. Do đó, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Suy ra } P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vì có 5 con gà mái trong tổng số 7 con gà ở chuồng I nên xác suất bắt được con gà mái nếu con gà đó ở chuồng I là: $P(A|B) = \frac{5}{7}$.

Vì có 3 con gà mái trong tổng số 8 con gà ở chuồng II nên xác suất bắt được con gà mái nếu con gà đó ở chuồng II là: $P(A|\bar{B}) = \frac{3}{8}$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{41}{84} \approx 0,49.$$

Đáp án: 0,49.

Câu 3. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$ ($0 \leq t \leq 4$). Kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Tìm nghiệm t_0 của phương trình $v(t) = 0$ và tính $s = \int_0^{t_0} v(t) dt$.

Lời giải chi tiết:

Xe dừng khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 20 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Quãng đường xe di chuyển từ khi bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:

$$s = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (20 - 5t) dt = \left(20t - \frac{5}{2}t^2 \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ (m)}.$$

Đáp án: 40.

Câu 4. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$ đồng thời thuộc mặt cầu có $(S): (x - 32)^2 + (y - 50)^2 + (z - 10)^2 = 109$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu vuông góc của tâm I mặt cầu trên mặt sân. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J bằng bao nhiêu?



Phương pháp giải:

Tìm tọa độ của J. Tính $JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2}$ với IM bằng bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải chi tiết:

Mặt cầu (S) có tâm $I(32; 50; 10)$ và bán kính $R = \sqrt{109}$.

Trong không gian Oxyz, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của I xuống mặt sân có tọa độ $J(32; 50; 0)$.

Xét tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 10$, $IM = R = \sqrt{109}$, suy ra $JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{109 - 100} = 3$.

Đáp án: 3.

Phần IV: Tự luận (3 điểm)

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Xét dấu của biểu thức $(x - 2)^2 - 1$ để phá dấu trị tuyệt đối.

Lời giải chi tiết:

$$\text{Ta có } (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \notin [1;2] \\ x=0 \notin [1;2] \end{cases}$$

Trên đoạn $[1;2]$ ta có $(x-2)^2 - 1 > 0$, suy ra $|(x-2)^2 - 1| = (x-2)^2 - 1$.

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_1^2 |(x-2)^2 - 1| dx = \int_1^2 [(x-2)^2 - 1] dx = \frac{2}{3}.$$

Câu 2. Trong không gian tọa độ (Oxyz), cho điểm $M(1;2;-2)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 3z + 1 = 0$. Phương

$$\text{trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) có phương trình tham số: } \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + bt \\ z = -2 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Khi đó giá trị của biểu thức $P = b^2 + c^2$ là bao nhiêu?

Phương pháp giải:

Do đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\vec{u} = \vec{n_p}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm.

$$\text{Theo đề bài phương trình tham số của đường thẳng } \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + bt \\ z = -2 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ nên vectơ chỉ phương của đường}$$

thẳng cần tìm có dạng $\vec{u'} = (-4; b; c)$.

Tìm b, c sao cho $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng phương.

Lời giải chi tiết:

Mặt phẳng (P): $2x + y - 3z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_p} = (2; 1; -3)$.

Do đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\vec{u} = \vec{n_p} = (2; 1; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm.

$$\text{Theo đề bài phương trình tham số của đường thẳng } \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + bt \\ z = -2 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ nên vectơ chỉ phương của đường}$$

thẳng cần tìm có dạng $\vec{u'} = (-4; b; c)$ (2).

Vì $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ đều là vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm nên chúng cùng phương với nhau.

$$\text{Suy ra } \frac{2}{-4} = \frac{1}{b} = \frac{-3}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = b^2 + c^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40.$$

Câu 3. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ Oxyz cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là (3; 2,5; 15) và (21; 27,5; 10). Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

**Phương pháp giải:**

Lập phương trình tham số của đường thẳng d chứa đường trượt zipline. Cho $z = 12$, tìm t , sau đó thay t tìm x, y .

Lời giải chi tiết:

Đường thẳng d chứa đường trượt zipline đi qua điểm $A(3; 2,5; 15)$ và có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{AB} = (18; 25; -5). \text{ Do đó, phương trình của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 25t \\ z = 15 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Khi du khách khi ở độ cao 12 mét, ta có $z = 12 \Leftrightarrow 15 - 5t = 12 \Leftrightarrow t = 0,6$.

Thay t vào phương trình đường thẳng, ta được tọa độ du khách là $M(13,8; 17,5; 12)$.