**ĐỀ THI HỌC KÌ II – Đề số 4**

**Môn: Toán học - Lớp 12**

**Chương trình GDPT 2018**

**BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM**

***Mục tiêu***

*- Ôn tập lý thuyết học kì II của chương trình sách giáo khoa Toán 12.*

*- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.*

*- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải tất cả các chương học kì II – chương trình Toán 12.*

**Phần I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Tìm $F(x)=\int \pi^2 dx$.

**A.** $F(x)=\pi^2 x+C$

**B.** $F(x)=\dfrac{\pi^2 x^2}{2}+C$

**C.** $F(x)=2\pi x+C$

**D.** $F(x)=\dfrac{\pi^3}{3}$

**Câu 2.** Cho f(x) là hàm số liên tục trên [1;2]. Biết F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [1;2] thỏa mãn F(-1) = 2 và F(2) = 3. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

**A.** 5

**B.** 1

**C.** -5

**D.** -1

**Câu 3.** Cho $\int_0^1 f(x)dx=3$ và $\int_0^1 g(x)dx=7$. Tính $\int_0^1 [f(x)-g(x)]dx$.

**A.** 10

**B.** -4

**C.** -10

**D.** 4

**Câu 4.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng x = 0, x = 3 bằng

**A.** $\pi\int_0^3 |x^3-4x|dx$

**B.** $\int_0^3 |x^3-4x|dx$

**C.** $\pi\int_0^3 (x^3-4x)^2 dx$

**D.** $\int_0^3 (x^3-4x)dx$

**Câu 5.** Một vecto chỉ phương của đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là

**A.** $\overrightarrow{u_1} = (1;3;0)$

**B.** $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;2)$

**C.** $\overrightarrow{u_3} = (1;3;2)$

**D.** $\overrightarrow{u_4} = (2;-1;0)$

**Câu 6.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và song song với mặt phẳng 5x – 3y + 2z – 3 = 0 có phương trình là

**A.** 5x – 3y + 2z + 5 = 0

**B.** 5x – 3y +2z = 0

**C.** 10x + 6y+ 4z = 0

**D.** 4x + y + 5z = 0

**Câu 7.** Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(\alpha)$: x + 2y – 2z + 3 = 0. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A(2;1;-5) và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ là

**A.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

**B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

**C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

**D.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+3}{-3}$ và $d_2$: $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $d_1$ và $d_2$ trùng nhau

**B.** $d_1$ và $d_2$ cắt nhau

**C.** $d_1$ và $d_2$ song song

**D.** $d_1$ và $d_2$ chéo nhau

**Câu 9.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 4 = 0$ có tâm và bán kính lần lượt là

**A.** I(2;0;-1); R = 3

**B.** I(4;0;-2); R = 3

**C.** I(-2;0;1); R = 1

**D.** I(2;0;-1); R = 1

**Câu 10.** Xác định m để mặt phẳng (P): 3x – 4y + 2z + m = 0 đi qua điểm A(3;1;-2).

**A.** m = -1

**B.** m = 1

**C.** m = 9

**D.** m = -9

**Câu 11.** Cho A và B là hai biến cố. P(A) = 0,7, P(B|A) = 0,9. Tính P(AB).

**A.** 0,9

**B.** 0,63

**C.** 0,2

**D.** 0,16

**Câu 12.** Cho hai biến cố A và B với P(B) = 0,8, P(A|B) = 0,7, $P(A|\overline{B}) = 0,45$. Tính P(B|A).

A. $\frac{56}{65}$

B. $\frac{12}{19}$

C. $\frac{6}{13}$

D. $\frac{22}{157}$

**Phần II: Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời câu 1, câu 2. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$ và hàm số g(x) = 2x.

**a)** Họ nguyên hàm của g(x) là $G(x) = x^2 + C$.

**b)** $\int_0^2 f(x)dx = \frac{14}{5}$.

**c)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm f(x), g(x) và hai đường thẳng x = 0, x = 3 bằng 3.

**d)** Cho hình phẳng H giới hạn bởi hàm số $f(x) = x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình H xoay quanh trục Ox là $\frac{178\pi}{15}$.

**Câu 2.** Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(-3;0;1), B(0;-2;-3), C(0;0;3), D(-3;1;1). Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

**a)** Hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu (S) lên trục Oy là điểm $H\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

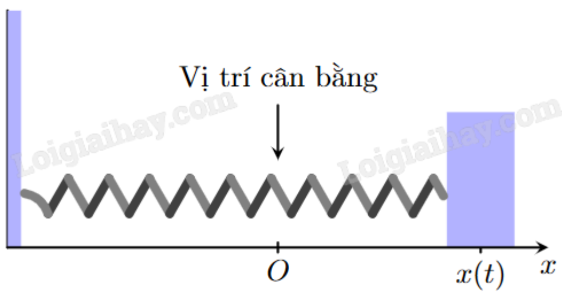
**b)** Khoảng cách từ gốc tọa độ đến tâm của mặt cầu (S) bằng $\frac{1}{2}$.

**c)** Mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{\sqrt{451}}{6}$.

**d)** Đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$ đi qua tâm của mặt cầu (S).

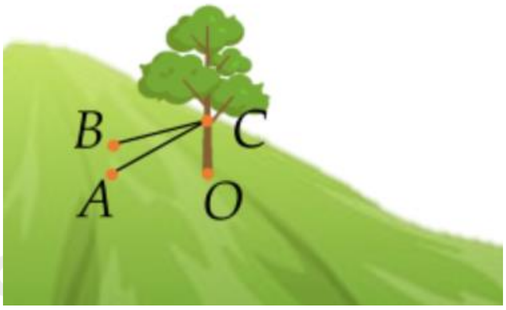
**Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như hình bên dưới, có vận tốc tức thời cho bởi v(t) = 2cost, trong đó t tính bằng giây và v(t) tính bằng cm/s. Tại thời điểm t = 0, con lắc ở vị trí cân bằng. Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimet (làm tròn đến hàng phần trăm).



**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một chiếc máy bay cất cánh từ điểm P(15;-4;2) và bay đều theo hướng của vecto $\vec{d} = (3;1;-2)$ với tốc độ 5 m/s. Sau thời gian 200 giây, máy bay đến điểm Q. Tìm tung độ điểm Q (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 3.** Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông), A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là O(0;0;0), A(3;-2;1), B(-5;-3;1) (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết rằng hai sợi dây neo đều được buộc vào thân cây tại điểm C(0;0;5) và dây kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Tổng các góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi bằng bao nhiêu độ (làm tròn số đo các góc đến hàng đơn vị của độ).




**Câu 4.** Có hai hộp đựng bóng. Hộp I có 4 quả bóng màu xanh và 8 quả bóng màu đỏ. Hộp II có 6 quả bóng màu xanh và 4 quả bóng màu đỏ. Trước tiên, từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng rồi cho vào hộp I. Sau đó, từ hộp I lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp I là quả bóng màu đỏ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Phần IV: Tự luận.** Thí sinh trình bày lời giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H): $\frac{4-3x}{x+3}$ và các trục tọa độ. Diện tích hình phẳng S bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**Câu 2.** Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian Oxyz, hai con đường đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm a để nút giao thông trên là nút giao thông cùng mức.

**Câu 3.** Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 48% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ vào có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ, tính xác suất người đó trên 45 tuổi.

**-------- Hết --------**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

**Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1)** A | **2)** A | **3)** D | **4)** B | **5)** C | **6)** B |
| **7)** C | **8)** B | **9)** D | **10)** A | **11)** B | **12)** A |

**Câu 1.** Tìm $F(x)=\int \pi^2 dx$.

**A.** $F(x)=\pi^2 x+C$

**B.** $F(x)=\dfrac{\pi^2 x^2}{2}+C$

**C.** $F(x)=2\pi x+C$

**D.** $F(x)=\dfrac{\pi^3}{3}$

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức $\int dx=x+C$ và $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$.

**Lời giải chi tiết:**

$F(x)=\int \pi^2 dx=\pi^2\int dx=\pi^2 x+C$.

**Đáp án A.**

**Câu 2.** Cho f(x) là hàm số liên tục trên [1;2]. Biết F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [1;2] thỏa mãn F(-1) = 2 và F(2) = 3. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

**A.** 5

**B.** 1

**C.** -5

**D.** -1

**Phương pháp giải:**

Áp dụng định nghĩa tích phân $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

**Lời giải chi tiết:**

$\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)=3-(-2)=5$.

**Đáp án A.**

**Câu 3.** Cho $\int_0^1 f(x)dx=3$ và $\int_0^1 g(x)dx=7$. Tính $\int_0^1 [f(x)-g(x)]dx$.

**A.** 10

**B.** -4

**C.** -10

**D.** 4

**Phương pháp giải:**

Áp dụng tính chất của tích phân.

**Lời giải chi tiết:**

$\int\limits_0^1 [f(x)-g(x)]dx = \int\limits_0^1 f(x)dx - \int\limits_0^1 g(x)dx = 3-7 = -4$.

**Đáp án D.**

**Câu 4.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng x = 0, x = 3 bằng

**A.** $\pi\int\limits_0^3 \left|x^3-4x\right|dx$

**B.** $\int\limits_0^3 \left|x^3-4x\right|dx$

**C.** $\pi\int\limits_0^3 \left(x^3-4x\right)^2 dx$

**D.** $\int\limits_0^3 \left(x^3-4x\right)dx$

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục hoành, hai đường thẳng x = a, x = b: $S = \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$.

**Lời giải chi tiết:**

Diện tích hình phẳng là $\int\limits_0^3 \left|x^3-4x\right|dx$.

**Đáp án B.**

**Câu 5.** Một vecto chỉ phương của đường thẳng $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là

**A.** $\overrightarrow{u_1} = (1;3;0)$

**B.** $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;2)$

**C.** $\overrightarrow{u_3} = (1;3;2)$

**D.** $\overrightarrow{u_4} = (2;-1;0)$

**Phương pháp giải:**

Đường thẳng $\begin{cases} x = x_0+at \\ y = y_0+bt \\ z = z_0+ct \end{cases}$ có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$.

**Lời giải chi tiết:**

Đường thẳng $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_3} = (1;3;2)$.

**Đáp án C.**

**Câu 6.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và song song với mặt phẳng 5x – 3y + 2z – 3 = 0 có phương trình là

**A.** 5x – 3y + 2z + 5 = 0

**B.** 5x – 3y +2z = 0

**C.** $10x + 6y + 4z = 0$ **D.** $4x + y + 5z = 0$

**Phương pháp giải:**

Mặt phẳng có phương trình tổng quát $Ax + By + Cz + D = 0$.

Tìm A, B, C: Dựa vào hai mặt phẳng song song có cùng vecto pháp tuyến.

Tìm D: Thay tọa độ điểm thuộc mặt phẳng vào x, y, z để tìm D.

**Lời giải chi tiết:**

Mặt phẳng song song với mặt phẳng $5x – 3y + 2z – 3 = 0$ có dạng $5x – 3y + 2z + D = 0$.

Vì mặt phẳng cần tìm đi qua gốc tọa độ nên $5.0 – 3.0 + 2.0 + D = 0$, suy ra $D = 0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $5x – 3y + 2z = 0$.

**Đáp án B.**

**Câu 7.** Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y – 2z + 3 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A(2;1;-5) và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ là

**A.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-1+2t \\ z=5-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

**B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

**C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-5-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

**D.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-5-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

**Phương pháp giải:**

Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có vecto chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ có phương trình là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

**Lời giải chi tiết:**

Vì đường thẳng vuông góc với $(\alpha)$ nên vecto pháp tuyến của $(\alpha)$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng.

Phương trình đường thẳng nhận $\vec{u}=(1;2;-2)$ làm vecto chỉ phương và đi qua điểm A(2;1;-5) là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-5-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

**Đáp án C.**

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+3}{-3}$ và $d_2$:

$\begin{cases} x=3t \\ y=-1+2t \\ z=0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $d_1$ và $d_2$ trùng nhau
**B.** $d_1$ và $d_2$ cắt nhau
**C.** $d_1$ và $d_2$ song song
**D.** $d_1$ và $d_2$ chéo nhau

**Phương pháp giải:**

Dựa vào vecto chỉ phương của hai đường thẳng và xét xem hai đường thẳng có giao điểm không.

**Lời giải chi tiết:**

Vecto chỉ phương của $d_1$, $d_2$ lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-3)$ và $\overrightarrow{u_2}=(3;2;0)$.

Hai vecto trên không cùng phương với nhau nên hai đường thẳng chéo nhau hoặc cắt nhau.

Phương trình tham số của $d_1$ là $\begin{cases} x=1+t' \\ y=-3-2t' \\ z=-3-3t' \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Xét $\begin{cases} 3t=1+t' \\ -1+2t=-3-2t' \\ 0=-3-3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=-1 \end{cases}$

Do đó $d_1$ và $d_2$ cắt nhau tại điểm có tọa độ (0;-1;0).

**Đáp án B.**

**Câu 9.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2z+4=0$ có tâm và bán kính lần lượt là

**A.** I(2;0;-1); R = 3
**B.** I(4;0;-2); R = 3
**C.** I(-2;0;1); R = 1
**D.** I(2;0;-1); R = 1

**Phương pháp giải:**

Mặt cầu phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có tâm I(a;b;c), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

**Lời giải chi tiết:**

Mặt cầu phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z+4=0$ có tâm I(2;0;-1), bán kính $R=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2-4}=1$.

**Đáp án D.**

**Câu 10.** Xác định m để mặt phẳng (P): 3x – 4y + 2z + m = 0 đi qua điểm A(3;1;-2).

**A.** m = -1
**B.** m = 1
**C.** m = 9
**D.** m = -9

**Phương pháp giải:**

Thay tọa độ điểm A vào phương trình (P) rồi giải, tìm m.

**Lời giải chi tiết:**

Ta có $3.3-4.1+2.(-2)+m=0 \Leftrightarrow m=-1$.

**Đáp án A.**

**Câu 11.** Cho A và B là hai biến cố. P(A) = 0,7, P(B|A) = 0,9. Tính P(AB).

**A.** 0,9

**B.** 0,63

**C.** 0,2

**D.** 0,16

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức nhân xác suất: P(AB) = P(A).P(B|A).

**Lời giải chi tiết:**

Áp dụng công thức nhân xác suất: P(AB) = P(A).P(B|A) = 0,7.0,9 = 0,63.

**Đáp án B.**

**Câu 12.** Cho hai biến cố A và B với P(B) = 0,8, P(A|B) = 0,7, $P(A\,|\,\overline{B})=0,45$. Tính P(B|A).

**A.** $\dfrac{56}{65}$

**B.** $\dfrac{12}{19}$

**C.** $\dfrac{6}{13}$

**D.** $\dfrac{22}{157}$

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức tính xác suất toàn phần.

**Lời giải chi tiết:**

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,8=0,2$.

$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,8.0,7+0,2.0,45=0,65$.

$P(B\,|\,A)=\dfrac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(A)}=\dfrac{0,8.0,7}{0,65}=\dfrac{56}{65}$.

**Đáp án A.**

**Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (2 điểm)**

| | |
|---|---|
| **1)** ĐSĐĐ | **2)** ĐSĐS |

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)=x^2+1$ và hàm số g(x) = 2x.

**a)** Họ nguyên hàm của g(x) là $G(x)=x^2+C$.

**b)** $\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{14}{5}$.

**c)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm f(x), g(x) và hai đường thẳng x = 0, x = 3 bằng 3.

**d)** Cho hình phẳng H giới hạn bởi hàm số $f(x)=x^2+1$, trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình H xoay quanh trục Ox là $\dfrac{178\pi}{15}$.

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa, định nghĩa tích phân, ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

**Lời giải chi tiết:**

**a) Đúng.** $G(x)=\int g(x)dx=\int 2xdx=x^2+C$.

**b) Sai.** $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^2+1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^2=\frac{2^3}{3}+2=\frac{14}{3}$.

**c) Đúng.** $S=\int_0^3 \left|x^2+1-2x\right|dx=3$.

**d) Đúng.** $S=\pi\int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 dx=\frac{178\pi}{15}$.

**Câu 2.** Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(-3;0;1), B(0;-2;-3), C(0;0;3), D(-3;1;1). Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

**a)** Hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu (S) lên trục Oy là điểm $H\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

**b)** Khoảng cách từ gốc tọa độ đến tâm của mặt cầu (S) bằng $\frac{1}{2}$.

**c)** Mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{\sqrt{451}}{6}$.

**d)** Đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$ đi qua tâm của mặt cầu (S).

**Phương pháp giải:**

Gọi (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Thay tọa độ các điểm thuộc (S) vào phương trình, ta được hệ phương trình, giải hệ tìm a, b, c, d.

a) Hình chiếu của M(a;b;c) trên Oy là M'(0;b;0).

b) $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

c) $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

d) Thay tọa độ tâm mặt cầu (S) vào phương trình của d. Nếu thỏa mãn thì d đi qua I.

**Lời giải chi tiết:**

Gọi (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

(S) đi qua A(-3;0;1), B(0;-2;-3), C(0;0;3), D(-3;1;1) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6a-2c+d=-10 \\ 4b+6c+d=-13 \\ -6c+d=-9 \\ 6a-2b-2c+d=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \\ d=-12 \end{cases}$$

Suy ra tâm mặt cầu (S) là $I\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

**a) Đúng.** Hình chiếu của $I\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ lên trục Oy là $I\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

**b) Sai.** $OI=\sqrt{\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{6}$.

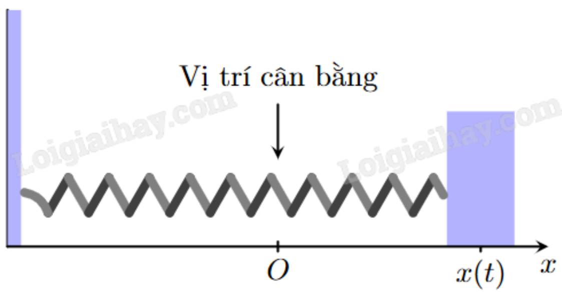
**c) Đúng.** $R=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-(-12)}=\frac{\sqrt{451}}{6}$.

**d) Sai.** Ta có $\frac{\frac{1}{6}-1}{2}\neq\frac{\frac{1}{2}}{1}\neq\frac{-\frac{1}{2}-2}{3}$ nên I không thuộc d, hay d không đi qua I.

**Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (2 điểm)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** 1,68 | **2)** 263 | **3)** 100 | **4)** 0,65 |

**Câu 1.** Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như hình bên dưới, có vận tốc tức thời cho bởi v(t) = 2cost, trong đó t tính bằng giây và v(t) tính bằng cm/s. Tại thời điểm t = 0, con lắc ở vị trí cân bằng. Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimet (làm tròn đến hàng phần trăm).




**Phương pháp giải:**

Tính $S=\int_0^1 |v(t)|dt$.

**Lời giải chi tiết:**

Quãng đường con lắc lò xo di chuyển được là:

$S=\int_0^1 |v(t)|dt=\int_0^1 |2\cos t|dt \approx 1,68$ (cm).

**Đáp án: 1,68.**

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một chiếc máy bay cất cánh từ điểm P(15;-4;2) và bay đều theo hướng của vecto $\vec{d}=(3;1;-2)$ với tốc độ 5 m/s. Sau thời gian 200 giây, máy bay đến điểm Q. Tìm tung độ điểm Q (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Phương pháp giải:**

Lập phương trình tham số của đường bay, từ đó suy ra tọa độ điểm Q theo tham số.

Tính quãng đường PQ (dựa vào vận tốc, thời gian di chuyển) rồi tìm t.

Thay t, ta được tung độ điểm Q.

**Lời giải chi tiết:**

Đường bay là đường thẳng đi qua P(15;-4;2), nhận $\vec{d}=(3;1;-2)$ làm vecto chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=15+3t \\ y=-4+t \\ z=2-2t \end{cases} \quad (t\ge 0)$.

Tốc độ của máy bay là 5 m/s. Sau 200 giây, quãng đường di chuyển của máy bay là PQ = 5.200 = 1000 (m).

Vì Q thuộc đường bay nên giả sử $Q(15+3t;-4+t;2-2t)$.

Do PQ = 1000 nên ta có $\sqrt{(15+3t-15)^2+(-4+t+4)^2+(2-2t-2)^2}=1000$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3t)^2+(+t)^2+(-2t)^2}=1000$

$\Leftrightarrow \sqrt{14t^2}=1000$

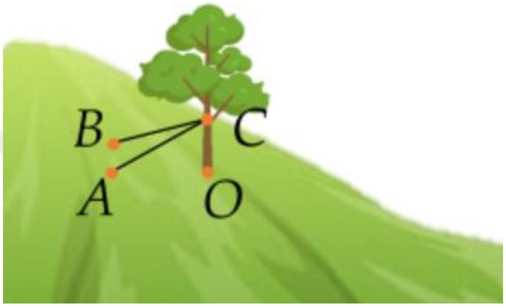
$\Leftrightarrow |t|=\dfrac{1000}{\sqrt{14}}$.

Vì $t\ge 0$ nên $t=\dfrac{1000}{\sqrt{14}}$.

Tung độ của Q là $y=-4+t=-4+\dfrac{1000}{\sqrt{14}}\approx 263$.

**Đáp án: 263.**

**Câu 3.** Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông), A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là O(0;0;0), A(3;-2;1), B(-5;-3;1) (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết rằng hai sợi dây neo đều được buộc vào thân cây tại điểm C(0;0;5) và dây kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Tổng các góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi bằng bao nhiêu độ (làm tròn số đo các góc đến hàng đơn vị của độ).




**Phương pháp giải:**

Sử dụng công thức tính tích có hướng để tìm vecto pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (OAB).

Tính các vecto $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$.

Áp dụng công thức $\sin\left(CA,(OAB)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{CA},\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\vec{n}\right|}$, $\sin\left(BC,(OAB)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC},\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\vec{n}\right|}$, từ đó tính được các góc.

**Lời giải chi tiết:**

Ta có $\overrightarrow{OA} = (3;-2;1)$, $\overrightarrow{OB} = (-5;-3;1)$.

$$\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & -3\end{vmatrix}\right) = (1;-8;-19).$$

Do đó $\vec{n} = (1;-8;-19)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

Ta có $\overrightarrow{CA} = (3;-2;-4)$, $\overrightarrow{BC} = (5;3;4)$ nên:

$$\sin\left(CA,(OAB)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{CA},\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|3.1+(-2).(-8)+(-4).(-19)\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}.\sqrt{1^2+(-8)^2+(-19)^2}} = \frac{95}{\sqrt{12354}}.$$

Suy ra $\left(CA,(OAB)\right) \approx 59^o$.

$$\sin\left(BC,(OAB)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{BC},\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|5.1+3.(-8)+4.(-19)\right|}{\sqrt{5^2+3^2+4^2}.\sqrt{1^2+(-8)^2+(-19)^2}} = \frac{95}{10\sqrt{213}}.$$

Suy ra $\left(BC,(OAB)\right) \approx 41^o$.

Vậy tổng các góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi bằng $59^o + 41^o = 100^o$.

**Đáp án: 100.**

**Câu 4.** Có hai hộp đựng bóng. Hộp I có 4 quả bóng màu xanh và 8 quả bóng màu đỏ. Hộp II có 6 quả bóng màu xanh và 4 quả bóng màu đỏ. Trước tiên, từ hộp II lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng rồi cho vào hộp I. Sau đó, từ hộp I lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp I là quả bóng màu đỏ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức tính xác suất toàn phần.

**Lời giải chi tiết:**

| Hộp I | | Hộp II | |
|---|---|---|---|
| 4 xanh | 8 đỏ | 6 xanh | 4 đỏ |

Gọi các biến cố:

A: "Bóng được lấy ra từ hộp II cho vào hộp I là màu đỏ".

Suy ra $\overline{A}$: "Bóng được lấy ra từ hộp II cho vào hộp I là màu xanh".

B: "Bóng được lấy ra từ hộp I là màu đỏ".

* TH1: A xảy ra. Để B xảy ra thì có 2 công đoạn:

+ Chọn được bóng đỏ từ hộp II: $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Sau khi cho bóng đỏ từ hộp II vào hộp I, hộp I có 9 quả đỏ trong tổng số 13 quả.

+ Chọn được bóng đỏ từ hộp I: $P(B\,|\,A) = \frac{9}{13}$.

Vậy xác suất xảy ra TH1 là $P(A).P(B\,|\,A) = \frac{2}{5}.\frac{9}{13} = \frac{18}{65}$.

* TH2: $\overline{A}$ xảy ra. Để B xảy ra thì có 2 công đoạn:

+ Chọn được bóng xanh từ hộp II: $P(\overline{A}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Sau khi cho bóng xanh từ hộp II vào hộp I, hộp I có 8 quả đỏ trong tổng số 13 quả.

+ Chọn được bóng đỏ từ hộp I: $P(B\,|\,\overline{A}) = \frac{8}{13}$.

Vậy xác suất xảy ra TH2 là $P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A}) = \frac{3}{5}.\frac{8}{13} = \frac{24}{65}$.

Áp dụng công thức tính xác suất toàn phần:

$$P(B) = P(A).P(B\,|\,A) + P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A}) = \frac{18}{65} + \frac{24}{65} = \frac{42}{65} \approx 0,65.$$

**Đáp án: 0,65.**

**Phần IV: Tự luận (3 điểm)**

**Câu 1.** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H): $\frac{4-3x}{x+3}$ và các trục tọa độ. Diện tích hình phẳng S bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**Phương pháp giải:**

Tìm giao điểm của đồ thị (H) với trục hoành.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân.

**Lời giải chi tiết:**

Ta có $\frac{4-3x}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, suy ra đồ thị (H) giao với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S=\int_0^{\frac{4}{3}}\left|\frac{4-3x}{x+3}\right|dx=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{4-3x}{x+3}\right)dx\approx 0,78$.

**Câu 2.** Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian Oxyz, hai con đường đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1:\begin{cases}x=1+at\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm a để nút giao thông trên là nút giao thông cùng mức.

**Phương pháp giải:**

Tìm a để $d_1$, $d_2$ cắt nhau.

**Lời giải chi tiết:**

Vecto chỉ phương của $d_1$, $d_2$ lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(a;1;1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;1)$.

Vì $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{1}$ nên hai vecto $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương.

Nút giao thông là cùng mức khi $d_1$, $d_2$ cắt nhau. Khi đó hệ phương trình $\begin{cases}1+at=1-t' & (1)\\t=2+2t' & (2)\\-1+2t=3-t' & (3)\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Từ (2) và (3) suy ra $\begin{cases}t=2\\t'=0\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases}t=2\\t'=0\end{cases}$ cũng là nghiệm của (1).

Thay t = 2, t = 0 vào (1), ta được $1+a.2=1-0\Leftrightarrow a=0$.

Vậy để nút giao thông trên là nút giao thông cùng mức thì a = 0.

**Câu 3.** Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 48% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ vào có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ, tính xác suất người đó trên 45 tuổi.

**Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

**Lời giải chi tiết:**

Gọi các biến cố:

A: "Người mua bảo hiểm ô tô là nữ".

B: "Người mua bảo hiểm ô tô trên 45 tuổi".

Ta cần tính P(B|A).

Do có 48% người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ nên P(A) = 48% = 0,48.

Do có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi nên P(AB) = 36% = 0,36.

Vậy $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0,36}{0,48}=0,75$.