

ĐỀ THI HỌC KÌ II – Đề số 10

Môn: Toán học - Lớp 11

Chương trình GDPT 2018

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết học kì II của chương trình sách giáo khoa Toán 11.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dần trải tất cả các chương học kì II – chương trình Toán 11.

Phần I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nghiệm của phương trình $3^x = 4$ là

- A.** $\log_3 4$ **B.** $\log_4 3$
C. $\sqrt[3]{5}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x^2$ là

- A.** $(-\infty; 0)$ **B.** $(0; +\infty)$
C. $(-\infty; +\infty)$ **D.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Câu 3. Hàm số $y = 2^x$ có đạo hàm là

- A.** $y' = 2^x \log 2$ **B.** $y' = x \cdot 2^{x-1}$
C. $y' = 2^x \ln 2$ **D.** $y' = 2^x$

Câu 4. Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** $(\sin x)' = \cos x$
- B.** $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- C.** $(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
- D.** $(\cos x)' = -\sin x$

Câu 5. Cho hàm số $y = (\ln x)^3$. Đạo hàm của hàm số đã cho là

- A.** $y' = \frac{3}{x}$
- B.** $y' = \frac{3(\ln x)^2}{x}$
- C.** $y' = \frac{\ln x}{x}$
- D.** $y' = 3 \ln x$

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $x^2 + 3^x$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $y' = 2x + 3^x$

B. $y' = 2x + 3^x \ln 3$

C. $y' = 2x + x3^{x-1}$

D. $y' = x + 3^x \ln 3$

Câu 7. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ tại điểm $x = -1$ là

A. -1

B. -5

C. 2

D. 6

Câu 8. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

B. $P(A \cup B) = P(A).P(B)$

C. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$

D. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Câu 9. Cho hai biến cố A và B độc lập. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai biến cố A và $\bar{B}$ độc lập

B. Hai biến cố A và B độc lập

C. Hai biến cố $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập

D. Hai biến cố A và $\bar{A}$ độc lập

Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AC \perp (SBD)$

B. $BD \perp (SAC)$

C. $CD \perp (SAD)$

D. $BC \perp (SAB)$

Câu 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $d(S, (ABCD)) = SA$

B. $d(D, (SAB)) = DA$

C. $d(A, (SBC)) = AB$

D. $d(D, (SAB)) = d(C, (SAB))$

Câu 12. Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh 3a và chiều cao bằng 5a. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $25a^3$

B. $45a^3$

C. $5a^3$

D. $15a^3$

Phần II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu 1, câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 2$.

a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 6x - 2$.

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Câu 2. Một hộp đựng 30 tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 30, hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Thẻ lấy được chia hết cho 4”, B là biến cố “Thẻ lấy được chia hết cho 3”.

a) A và B xung khắc.

b) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 4 bằng $\frac{11}{30}$.

c) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4 bằng $\frac{1}{15}$.

d) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 hoặc 4 bằng $\frac{1}{2}$.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

Câu 1. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 4$.

Đáp án: 21.

Câu 2. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng" (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 3. Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, trong đó N_0 là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t = 0$ và k là hằng số tương trường của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0 = 100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

Câu 4. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Phần IV: Tự luận. Thí sinh trình bày lời giải từ câu 1 đến câu 3.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

Phương pháp giải:

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Tìm giao điểm A, B của tiếp tuyến với hai trục tọa độ.

Diện tích tam giác là $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB$.

Câu 2. Có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2024; 2024]$ của bất phương trình $\log_2(2^x + 1) > 2 + x$?

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM) .

----- Hết -----

**Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)**

1) A	2) D	3) C	4) C	5) B	6) B
7) B	8) A	9) D	10) A	11) C	12) D

Câu 1. Nghiệm của phương trình $3^x = 4$ là

A. $\log_3 4$

B. $\log_4 3$

C. $\sqrt[3]{5}$

D. $\frac{5}{3}$

Phương pháp giải:Với $a > 0$: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.**Lời giải chi tiết:**

$$3^x = 4 \Leftrightarrow \log_3 4$$

Đáp án A.**Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x^2$ là

A. $(-\infty; 0)$

B. $(0; +\infty)$

C. $(-\infty; +\infty)$

D. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Phương pháp giải:

Tìm ĐKXĐ của hàm số.

Lời giải chi tiết:ĐKXĐ: $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy tập xác định của $y = \log_5 x^2$ là $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.**Đáp án D.****Câu 3.** Hàm số $y = 2^x$ có đạo hàm là

A. $y' = 2^x \log 2$

B. $y' = x \cdot 2^{x-1}$

C. $y' = 2^x \ln 2$

D. $y' = 2^x$

Phương pháp giải:Áp dụng công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \ln a$.**Lời giải chi tiết:**

$$y' = (2^x)' = 2^x \ln 2.$$

Đáp án C.**Câu 4.** Khẳng định nào sau đây sai?

A. $(\sin x)' = \cos x$

B. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

C. $(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

D. $(\cos x)' = -\sin x$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm số lượng giác.

Lời giải chi tiết:

Ta có $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ nên C sai.

Đáp án C.

Câu 5. Cho hàm số $y = (\ln x)^3$. Đạo hàm của hàm số đã cho là

A. $y' = \frac{3}{x}$

B. $y' = \frac{3(\ln x)^2}{x}$

C. $y' = \frac{\ln x}{x}$

D. $y' = 3 \ln x$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức đạo hàm hợp $(u^\alpha)' = u' \cdot \alpha \cdot u^{\alpha-1}$.

Lời giải chi tiết:

$$y' = [(\ln x)^3]' = 3 \cdot (\ln x)' (\ln x)^2 = \frac{3(\ln x)^2}{x}.$$

Đáp án B.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $x^2 + 3^x$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $y' = 2x + 3^x$

B. $y' = 2x + 3^x \ln 3$

C. $y' = 2x + x3^{x-1}$

D. $y' = x + 3^x \ln 3$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Lời giải chi tiết:

$$y' = (x^2 + 3^x)' = 2x + 3^x \ln 3.$$

Đáp án B.

Câu 7. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ tại điểm $x = -1$ là

A. -1

B. -5

C. 2

D. 6

Phương pháp giải:

Tính $f'(-1)$.

Lời giải chi tiết:

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$.

Đáp án B.

Câu 8. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

B. $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$

C. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$

D. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.

Lời giải chi tiết:

Hai biến cố A, B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Đáp án A.

Câu 9. Cho hai biến cố A và B độc lập. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai biến cố A và $\bar{B}$ độc lập

B. Hai biến cố A và B độc lập

C. Hai biến cố $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập

D. Hai biến cố A và $\bar{A}$ độc lập

Phương pháp giải:

Áp dụng lý thuyết về hai biến cố độc lập: Hai biến cố được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Lời giải chi tiết:

Vì $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ nên xác suất của $\bar{A}$ và A phụ thuộc vào nhau. Do đó hai biến cố trên không độc lập.

Đáp án D.

Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AC \perp (SBD)$

B. $BD \perp (SAC)$

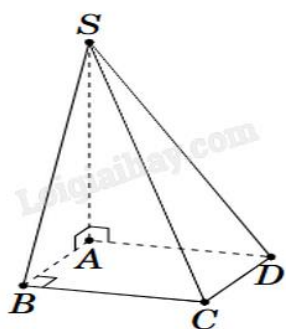
C. $CD \perp (SAD)$

D. $BC \perp (SAB)$

Phương pháp giải:

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng.

Lời giải chi tiết:



Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow \text{Đáp án C đúng.}$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$$

Vì AC chỉ vuông góc với BD trong (SBD) nên AC không vuông góc với (SBD).

Đáp án A.

Câu 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $d(S, (ABCD)) = SA$

B. $d(D, (SAB)) = DA$

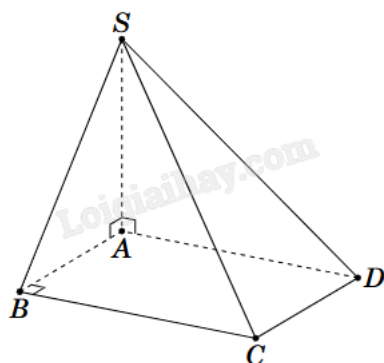
C. $d(A, (SBC)) = AB$

D. $d(D, (SAB)) = d(C, (SAB))$

Phương pháp giải:

Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Lời giải chi tiết:



Vì B không phải hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) nên $d(A, (SBC)) \neq AB$.

Đáp án C.

Câu 12. Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh $3a$ và chiều cao bằng $5a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $25a^3$

B. $45a^3$

C. $5a^3$

D. $15a^3$

Phương pháp giải:

Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} Bh$.

Lời giải chi tiết:

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} (3a)^2 \cdot 5a = 15a^3.$$

Đáp án D.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (2 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.
- c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 6x - 2$.
- d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Phương pháp giải:

- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 là $f'(x_0)$.
- c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
- d) Kiểm tra tích của hai hệ số góc có thể bằng -1 không.

Lời giải chi tiết:

a) **Sai.** Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) **Đúng.** $f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f'(1) = 6.1^2 = 6$.

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.

c) **Đúng.** Ta có $f(1) = 2.1^3 + 2 = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là:

$$y = 6(x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = 6x - 2.$$

d) **Sai.** Với x_0 bất kì, ta có $f'(x_0) = 6x_0^2$.

Gọi A và B là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Khi đó:

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A là $f'(x_A) = 6x_A^2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm B là $f'(x_B) = 6x_B^2$.

Để tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau thì $f'(x_A).f'(x_B) = -1 \Leftrightarrow 6x_A^2.6x_B^2 = -1$ (vô lí).

Vậy không tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ vuông góc với nhau.

Câu 2. Một hộp đựng 30 tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 30, hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Thẻ lấy được chia hết cho 4”, B là biến cố “Thẻ lấy được chia hết cho 3”.

a) A và B xung khắc.

b) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 4 bằng $\frac{11}{30}$.

c) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4 bằng $\frac{1}{15}$.

d) Xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 hoặc 4 bằng $\frac{1}{2}$.

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc nhân xác suất và tính xác suất của biến cố đối.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. Ta có $A \cap B$ là biến cố: “Lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4”.

Suy ra $A \cap B = \{12; 24\} \neq \emptyset$ nên A và B không xung khắc.

b) Sai. $A = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$.

Vậy xác để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 4 là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{30}$.

c) Đúng. $n(A \cap B) = 2$ nên xác suất để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4 là

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{30}.$$

d) Đúng. $B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\}$.

Xác để lấy được thẻ đánh số chia hết cho 3 là $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{30} + \frac{1}{3} - \frac{2}{30} = \frac{1}{2}.$$

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (2 điểm)

1) 21	2) 0,52	3) 27	4) 113
-------	---------	-------	--------

Câu 1. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 4$.

Phương pháp giải:

Tính $v(4) = s'(4)$.

Lời giải chi tiết:

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 4t + 5$.

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 4$ là $v(4) = 4.4 + 5 = 21$ (m/s).

Đáp án: 21.

Câu 2. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng" (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Phương pháp giải:

Áp dụng phương pháp tổ hợp và công thức cộng xác suất.

Lời giải chi tiết:

Số cách xếp 7 người thành một hàng ngang là $7!$.

Gọi các biến cố:

A: “Mai đứng ở đầu hàng”; B: “Lan đứng ở đầu hàng”.

* Xác suất Mai đứng đầu hàng:

+ Có 2 cách xếp Mai đứng ở đầu hàng (ngoài cùng bên trái hoặc phải).

+ Có 6! cách xếp các bạn còn lại.

Vậy xác suất Mai đứng đầu hàng là $P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

* Xác suất Lan đứng đầu hàng: Tương tự Mai: $P(B) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

* Xác suất cả Mai và Lan đứng đầu hàng:

+ Có 2 cách xếp Mai và Lan cùng đứng đầu hàng (hai bạn đổi chỗ cho nhau).

+ Có 5! cách xếp các bạn còn lại.

Vậy xác cả Mai và Lan đứng đầu hàng là $P(A \cap B) = \frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}$.

Xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng” là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{11}{21} \approx 0,52.$$

Đáp án: 0,52.

Câu 3. Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, trong đó N_0 là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t = 0$ và k là hằng số tương trường của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0 = 100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

Phương pháp giải:

Thay các dữ kiện từ đề bài để tìm k , từ đó giải phương trình mũ tìm t .

Lời giải chi tiết:

Vì số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày nên ta có:

$$2N_0 = N_0 \cdot e^{9k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{9}.$$

Để được 800 con ruồi, cần:

$$800 = 100 \cdot e^{t \frac{\ln 2}{9}} \Leftrightarrow e^{t \frac{\ln 2}{9}} = 8 \Leftrightarrow t \frac{\ln 2}{9} = \ln 8 \Leftrightarrow t = 9 \frac{\ln 8}{\ln 2} = 27 \text{ (ngày)}.$$

Đáp án: 27.

Câu 4. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



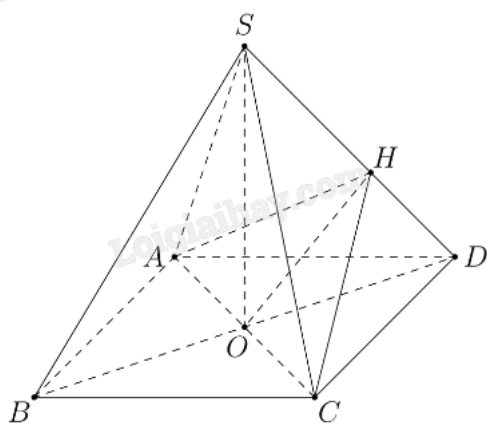
Phương pháp giải:

Mô hình hóa kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình. O là tâm đáy $ABCD$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SD .

Tính $[A, SD, C] = AHC$.

Lời giải chi tiết:



Mô hình hóa kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình. O là tâm đáy $ABCD$.

Khi đó, $SO = 21$ và $AB = 34$ (m).

Vì $S.ABCD$ là chóp đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SD , do đó $OH \perp SD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AHC)$, do đó $HC \perp SD$ và $HA \perp SD$.

Như vậy $[A, SD, C] = AHC$.

Ta có $OD = \frac{BD}{2} = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = \frac{34\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O , đường cao OH :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD^2} \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OD}{\sqrt{SO^2 + OD^2}} = \frac{21 \cdot 17\sqrt{2}}{\sqrt{21^2 + (17\sqrt{2})^2}} = \frac{357\sqrt{2}}{\sqrt{1019}}.$$

$$AH = CH = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{843880}{1019}}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHC: \cos AHC = \frac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2AH \cdot CH} = -\frac{289}{730} \Rightarrow AHC \approx 113^\circ.$$

Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tứ tháp có số đo xấp xỉ 113° .

Đáp án: 113.

Phần IV: Tự luận (3 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

Phương pháp giải:

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Tìm giao điểm A, B của tiếp tuyến với hai trục tọa độ.

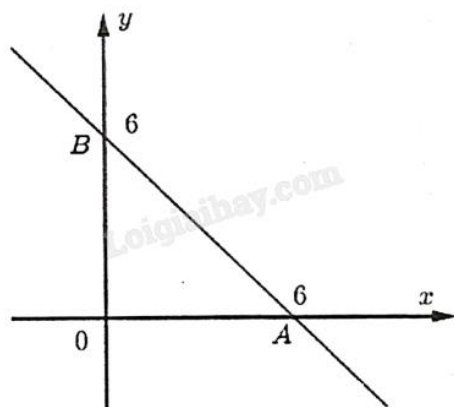
$$\text{Diện tích tam giác là } S = \frac{1}{2} OA \cdot OB.$$

Lời giải chi tiết:

$$\text{Ta có } y' = \frac{9' \cdot x - 9 \cdot x'}{x^2} = -\frac{9}{x^2}, \text{ hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là } y'(3) = -\frac{9}{3^2} = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến d với (C) tại M là:

$$y = -1(x - 3) + 3 \Leftrightarrow y = -x + 6.$$



d cắt trục tung hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm $A(6;0)$ và $B(0;6)$ nên diện tích tam giác OAB là:

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 = 18 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 2. Có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2024; 2024]$ của bất phương trình $\log_2(2^x + 1) > 2 + x$?

Phương pháp giải:

Tìm ĐKXĐ và giải bất phương trình.

Lời giải chi tiết:

ĐKXD: $2^x + 1 > 0$ (luôn đúng).

Khi đó $\log_2(2^x + 1) > 2 + x \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) > \log_2 2^{2+x} \Leftrightarrow 2^x + 1 > 2^{2+x}$

$$\Leftrightarrow 2^x + 1 > 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 1 > 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{1}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \log_2 \frac{1}{3}\right)$.

Nghiệm nguyên thuộc $[-2024; 2024]$ của bất phương trình là $\{-2024; -2023; \dots; -3; -2\}$.

Vậy có tất cả 2023 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM) .

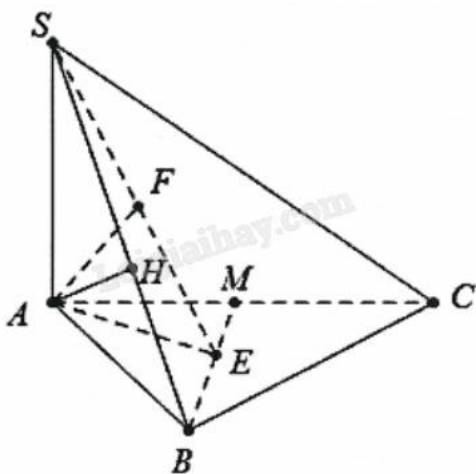
Phương pháp giải:

a) Kẻ $AH \perp SB$, H thuộc SB . Chứng minh $d(A, (SBC)) = AH$.

b) Kẻ $AE \perp BM$, $AF \perp SE$. Chứng minh $d(A, (SBM)) = AF$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài các cạnh trên.

Lời giải chi tiết:



a) Kẻ $AH \perp SB$, H thuộc SB .

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

$$\text{Khi đó } d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} a.$$

b) Kẻ $AE \perp BM$, $AF \perp SE$.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BM$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BM \perp AE \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAE) \Rightarrow BM \perp AF.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AF \perp BM \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBM) \Rightarrow d(A, (SBM)) = AF.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại B: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a.$$

$$\text{Vì BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC nên } AM = BM = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$\text{Khi đó } \triangle ABM \text{ là tam giác đều cạnh a, suy ra } AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } d(A, (SBM)) = AF = \frac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2a)^2}} = \frac{2\sqrt{57}}{19} a.$$