

ĐỀ THAM KHẢO THI TUYỂN SINH VÀO 10 – ĐỀ SỐ 10
MÔN TOÁN

Thời gian: 120 phút

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

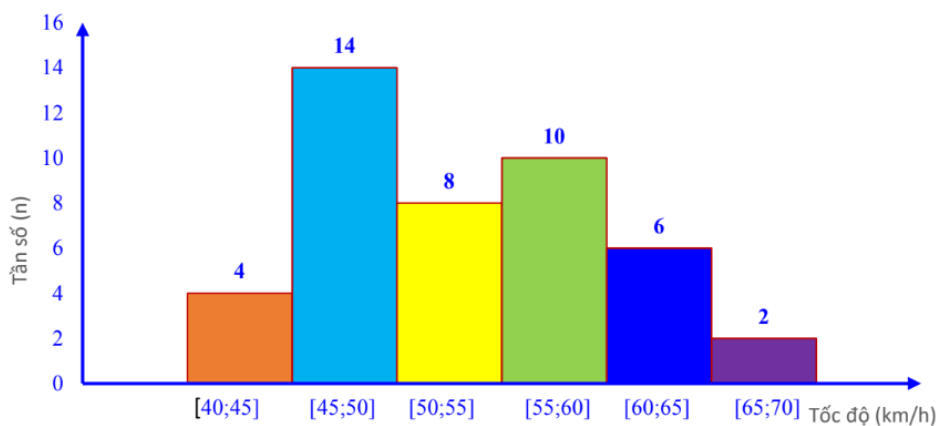


HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1: (1,5 điểm)

1) Biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ.



Hãy cho biết số lượng ô tô ở nhóm nào nhiều nhất, tính tần số tương đối ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

2) Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”. Tính xác suất biến cố: “Số xuất hiện trên viên bi lấy ra chia 7 dư 2”.

Phương pháp

1) Xác định nhóm có lượng ô tô nhiều nhất.

Tần số tương đối của nhóm bằng: tần số của nhóm : tổng . 100%.

2) Xác định không gian mẫu của phép thử, tính số phần tử của không gian mẫu.

Tính số kết quả thuận lợi của biến cố.

Xác suất của biến cố = số kết quả thuận lợi của biến cố : số phần tử của không gian mẫu.

Lời giải

1) Nhóm có tần số lớn nhất là [45;50), với tần số là 14.

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [45;50) là $\frac{14}{44} \cdot 100\% \approx 31,8\%$.

2) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 20$.

Gọi A là biến cố “Số xuất hiện trên viên bi lấy ra chia 7 dư 2”.

Các kết quả thuận lợi cho A là 2; 9; 16. Suy ra $n(A) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{20}$.

Câu 2: (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0, x \neq 4,$

$x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$.

3) Cho $P = A : B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$.

Phương pháp

1) Kiểm tra điều kiện của x. Nếu thỏa mãn, thay $x = 16$ vào A.

2) Kết hợp các tính chất của căn thức bậc hai để rút gọn biểu thức.

3) Rút gọn $P = A : B$ giải bất phương trình $P < \frac{1}{2}$.

Lời giải

1) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào A, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-3} = \frac{4-1}{4-3} = 3.$$

Vậy khi $x = 16$ thì $A = 3$.

$$2) B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \quad (\text{đpcm}).$$

$$3) P = A : B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}.$$

Ta có $P < \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$$

$$2(\sqrt{x}-1) < \sqrt{x}+2 \quad (\text{vì } 2(\sqrt{x}+2) > 0)$$

$$\sqrt{x} < 4$$

$$x < 16.$$

Kết hợp ĐK, ta có $0 \leq x < 16$, $x \neq 4$, $x \neq 9$ thì $P < \frac{1}{2}$.

Câu 3: (2,5 điểm)

1) Trong một thí nghiệm, Bình muốn pha để được 36 ml dung dịch HCl nồng độ 12%. Trong phòng thí nghiệm chỉ có sẵn dung dịch HCl nồng độ 8% và dung dịch HCl nồng độ 20%. Hỏi Bình cần sử dụng bao nhiêu mililit mỗi loại dung dịch để có được dung dịch mong muốn?

2) Một xí nghiệp theo kế hoạch phải sản xuất 75 sản phẩm trong một số ngày dự kiến. Trong thực tế, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày xí nghiệp làm vượt mức 5 sản phẩm, vì vậy không những họ đã làm được 80 sản phẩm mà còn hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

3) Biết rằng phương trình bậc hai $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + m = 0$ có một nghiệm $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Phương pháp

1) Gọi số ml dung dịch HCl nồng độ 8% và 20% cần sử dụng để tạo thành 36 ml dung dịch HCl nồng độ 12% lần lượt là x và y ($x, y > 0$).

Biểu diễn lượng dung dịch theo x, y .

Lập hệ phương trình, giải hệ để tìm x, y .

2) Gọi số sản phẩm mỗi ngày xí nghiệp phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm; $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 75$).

Biểu diễn thời gian xí nghiệp sản xuất theo kế hoạch và trên thực tế.

Vì xí nghiệp hoàn thành kế hoạch sớm 1 ngày nên ta lập được phương trình.

Giải phương trình và kết luận.

3) Thay nghiệm vào phương trình, tính m .

Tổng bình phương hai nghiệm là $x_1^2 + x_2^2$.

Biến đổi biểu thức và áp dụng định lý Viète: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Lời giải

1) Gọi số ml dung dịch HCl nồng độ 8% và 20% cần sử dụng để tạo thành 36 ml dung dịch HCl nồng độ 12% lần lượt là x và y ($x, y > 0$).

Vì Bình muốn pha 36 ml dung dịch HCl nồng độ 12% nên ta có phương trình $x + y = 36$ (1)

Mặt khác, Bình muốn pha 36 ml dung dịch HCl nồng độ 12% từ các dung dịch HCl 8% và 20% nên ta có phương trình $8\%x + 20\%y = 12\%.36$ hay $0,08x + 0,2y = 4,32$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 0,08x + 0,2y = 4,32 \end{cases}$$

Giải hệ được $x = 24$ (TM) và $y = 12$ (TM).

Vậy Bình cần 24 ml dung dịch HCl 8% và 12 ml dung dịch HCl 20% để pha chế 36 ml dung dịch HCl 12%.

2) Gọi số sản phẩm mỗi ngày xí nghiệp phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm; $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 75$).

Thời gian hoàn thành sản xuất 75 sản phẩm theo kế hoạch là $\frac{75}{x}$ (ngày).

Thực tế, mỗi ngày xí nghiệp làm được $x + 5$ sản phẩm, tổng cộng được 80 sản phẩm.

Thực tế, thời gian hoàn thành kế hoạch là $\frac{80}{x+5}$ (ngày).

Xí nghiệp hoàn thành sớm 1 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{x+5} + 1 = \frac{75}{x}$$

$$\frac{80x}{x(x+5)} + \frac{x(x+5)}{x(x+5)} = \frac{75(x+5)}{x(x+5)}$$

$$80x + x(x+5) = 75(x+5)$$

$$80x + x^2 + 5x = 75x + 375$$

$$x^2 + 10x - 375 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 15$ (TM) và $x = -25$ (loại).

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất 15 sản phẩm.

3) Thay $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vào phương trình $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + m = 0$, được:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (2 + \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} + m = 0$$

$$m = \sqrt{3}.$$

Phương trình bậc hai đã cho là $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Áp dụng hệ thức Viète:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2+\sqrt{3})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{4}$.

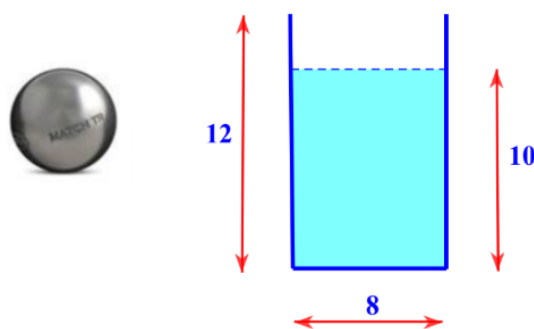
Vậy tổng bình phương hai nghiệm của phương trình là $\frac{7}{4}$.

Câu 4: (4 điểm)

1) Một cốc nước có dạng hình trụ với đường kính đáy bằng 8 cm, chiều cao 12 cm và chứa một lượng nước cao 10 cm.

a) Tính thể tích lượng nước chứa trong cốc (làm tròn đến hàng phần trăm).

b) Người ta thả từ từ một viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có thể tích là 4π (cm³) vào trong cốc. Hỏi mực nước trong cốc lúc này là bao nhiêu cm?



2) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) cắt cạnh BC tại I.

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\angle BAD = \angle CAQ$.

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF. Chứng minh $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$ và PI song song với HQ.

Phương pháp

1)

a) Tính bán kính đáy cốc.

Tính thể tích lượng nước áp dụng công thức thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h$.

b) Gọi h_1 là chiều cao nước dâng thêm.

Thể tích nước dâng thêm bằng thể tích viên bi nên ta tìm được h_1 .

Mực nước hiện tại bằng $h + h_1$.

2)

a) Chứng minh $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ suy ra A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

b) Chứng minh $\angle BAD = \angle QBC$ (cùng bằng $\angle BCF$) và $\angle QBC = \angle QAC$. Từ đó suy ra $\angle BAD = \angle QAC$.

c) $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$: Chứng minh $\angle EAP = \angle BAI$ và $\angle AEP = \angle ABI$.

$PI \parallel HQ$: Chứng minh $\frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ} \left(= \frac{AE}{AB} \right)$ và áp dụng định lý Thalès đảo để kết luận.

Lời giải

1)

a) Bán kính đáy cốc nước là $r = 8 : 2 = 4$ (cm); mực nước ban đầu là $h = 10$ (cm).

Thể tích lượng nước chứa trong cốc là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \approx 502,65$ (cm³).

b) Gọi h_1 là chiều cao nước dâng thêm.

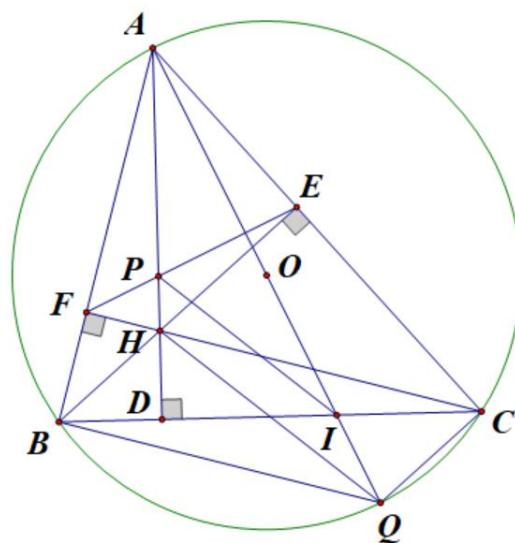
Thể tích nước dâng thêm bằng thể tích viên bi nên $\pi r^2 h_1 = 4\pi$

$$\pi \cdot 4^2 h_1 = 4\pi$$

$$h_1 = 0,25 \text{ (cm)}.$$

Vậy mực nước trong cốc sau khi thả viên bi là $10 + 0,25 = 10,25$ (cm).

2)



a) BE, CF là đường cao của tam giác ABC nên $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.

Vì $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ nên E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Vậy A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

b) Có $\angle BAD = \angle BCF$ (cùng phụ với $\angle ABC$) (1)

Vì B thuộc đường tròn (O) đường kính AQ nên $\angle ABQ = 90^\circ$, suy ra $BQ \perp AB$.

Mà $CF \perp AB$ nên $BQ \parallel CF$. Do đó, $\angle QBC = \angle BCF$ (góc so le trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BAD = \angle QBC$.

Mặt khác, $\angle QBC = \angle QAC$ (góc nội tiếp chắn cung QC).

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{QAC}$ (đpcm).

c) Từ chứng minh trên, ta có $\widehat{BAD} = \widehat{QAC}$

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAI} = \widehat{QAC} + \widehat{DAI}$$

$$\widehat{BAI} = \widehat{EAP}.$$

Vì $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên F, E cùng thuộc đường tròn đường kính BC, hay tứ giác BFEC nội tiếp.

Suy ra $\widehat{FBC} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ (hai góc đối của tứ giác nội tiếp).

Mặt khác $\widehat{AEF} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ (góc kề bù).

Do đó $\widehat{FBC} = \widehat{AEF}$ (cùng bù với $\widehat{FEC}$) (3)

Xét $\triangle AEP$ và $\triangle ABI$, có:

$$+ \widehat{EAP} = \widehat{BAI};$$

$$+ \widehat{AEP} = \widehat{ABI} \text{ (chứng minh trên).}$$

Suy ra $\triangle AEP \sim \triangle ABI$ (g.g) (đpcm), do đó $\frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AI}$ (4)

Vì tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

Mà $\widehat{FCB} = \widehat{CBQ}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{FEB} = \widehat{CBQ}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{AEP} + \widehat{FEB} = \widehat{ABI} + \widehat{CBQ}$, do đó $\widehat{AEH} = \widehat{ABQ}$.

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ABQ$, có:

$$+ \widehat{EAH} = \widehat{BAQ};$$

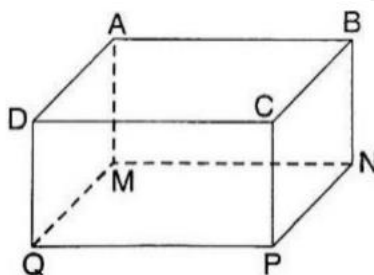
$$+ \widehat{AEH} = \widehat{ABQ}.$$

Suy ra $\triangle AEH \sim \triangle ABQ$ (g.g) (đpcm), do đó $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AQ}$ (6)

Từ (4) và (6) suy ra $\frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ}$ hay $\frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AQ}$.

Vậy $PI \parallel HQ$ (định lý Thalès đảo).

Câu 5: (0,5 điểm) Một bể bơi mini có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy MNPQ là hình vuông. Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể bơi sao cho tổng diện tích các mặt làm bể bơi (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể bơi là 4 m^3 .



Phương pháp

Gọi độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể bơi lần lượt là x và y (mét; $x > 0, y > 0$).

Biểu diễn y theo x .

Biểu diễn diện tích các mặt của bể bơi theo x .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, tìm x để diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể bơi lần lượt là x và y (mét; $x > 0, y > 0$).

Do thể tích bể bơi là 4 m^3 nên $x^2 y = 4$ hay $y = \frac{4}{x^2}$.

Tổng diện tích các mặt của bể bơi là:

$$S = 4xy + x^2 = \frac{16}{x} + x^2 = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\frac{8}{x}, \frac{8}{x}$ và x^2 , ta được:

$$S = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{8}{x}$, suy ra $x = 2, y = 1$.

Vậy để tổng diện tích các mặt làm bể bơi là nhỏ nhất thì $MN = 2 \text{ (m)}, AM = 1 \text{ (m)}$.