

CHUYÊN ĐỀ 2:

SỐ THỰC

ÔN HÈ MÔN: TOÁN - LỚP 7



BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Dạng 7. Tính giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

A. Lý thuyết

Đánh giá biểu thức A:

+ Nếu $A \geq a$ (với a là số đã biết) thì **giá trị nhỏ nhất** của A là a.+ Nếu $A \leq b$ (với b là số đã biết) thì **giá trị lớn nhất** của A là b.*** Tính giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa lũy thừa chẵn**Biểu thức a^n với n là số chẵn (2;4;6;...) thì $a^n \geq 0$ với mọi giá trị của a.*** Tính giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa căn bậc hai**

Sử dụng kiến thức của căn bậc hai:

$$\sqrt{a} \geq 0 \text{ với mọi } a \geq 0; -\sqrt{a} \leq 0 \text{ với mọi } a \geq 0.$$

*** Tính giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối**- Dựa vào tính chất $|x| \geq 0$.+ Ta biến đổi biểu thức A đã cho về dạng $A \geq a$ (với a là số đã biết) để suy ra **giá trị nhỏ nhất** của A là a.+ Ta biến đổi biểu thức A đã cho về dạng $A \leq b$ (với b là số đã biết) để suy ra **giá trị lớn nhất** của A là b.- Nếu biểu thức chứa hai hạng tử là hai biểu thức trong giá trị tuyệt đối, ta dùng tính chất: Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, ta có:

$$|x + y| \leq |x| + |y|; |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Chú ý:+ Ta có: $|kx| \geq 0$ thì: $|kx| + a \geq a$; $-|kx| + a \leq a$ Dấu “=” xảy ra khi $kx = 0$.+ Ta có: $|kx + b| \geq 0$ thì $|kx + b| + a \geq a$; $-|kx + b| + a \leq a$ Dấu “=” xảy ra khi $kx + b = 0$.+ Ta có: $|a| + |b| \geq |a + b|$ Dấu “=” xảy ra khi $ab \geq 0$.**B. Bài tập****Bài 1:** Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \quad \text{b) } A = \frac{5}{\sqrt{x} + 2}.$$

Bài 2: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\text{a) } D = \frac{3}{-2 - \sqrt{x}} \quad \text{b) } D = \frac{6}{-3 - \sqrt{x}}.$$

Bài 3: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{1}{2} + 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ b) $B = x^2 + |y - 2| - 5$

Bài 4: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = 8 - 6|x - 2|$ b) $B = \frac{1}{2|x - 1| + 3}$

Bài 5: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2} + \sqrt{x}$.

Bài 6: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -\sqrt{x^2 + 36} + 2025$.

Bài 7: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 3\sqrt{x} - 2025$ với $x \geq 0$.

Bài 8: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{x^2 + 169} - 2025$.

Bài 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = |3x - 5| + |3x - 9|$.

Bài 10: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |-x - 3| + (y - 1)^2 + (x + 3)^4 + 2$

A. 0. B. -2. C. 2. D. 3.

Bài 11: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x^2 - 4)^2 + |y - 5| - 1$

A. 2. B. 3. C. 1. D. -1.

Bài 12: Giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 10 - \sqrt{x} - (x - 2y + 1)^2$ với $x \geq 0$ là:

A. 10. B. 11. C. 1. D. -10.

-----Hết-----

Hướng dẫn giải chi tiết

Bài 1: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{2}{\sqrt{x}+3}$.

b) $A = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $A \leq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị lớn nhất của A là k.

Lời giải

a) Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+3 \geq 0+3=3$ với mọi $x \geq 0$

Do đó $\frac{2}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{2}{3}$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0$ hay $x=0$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x=0$.

b) Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+2 \geq 0+2=2$ với mọi $x \geq 0$

Do đó $\frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0$ hay $x=0$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{5}{2}$ khi $x=0$.

Bài 2: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $D = \frac{3}{-2-\sqrt{x}}$.

b) $D = \frac{6}{-3-\sqrt{x}}$.

Phương pháp

- Sử dụng kiến thức $-\sqrt{a} \leq 0$ với mọi $a \geq 0$.

- Nếu $a \geq b$ thì $\frac{k}{a} \leq \frac{k}{b}$ với mọi $k \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $D \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của D là k.

Lời giải

a) Vì $-\sqrt{x} \leq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $-2-\sqrt{x} \leq -2$ với mọi $x \geq 0$.

Do đó $\frac{3}{-2-\sqrt{x}} \geq \frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0$ hay $x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $D = \frac{3}{-2-\sqrt{x}}$ là $\frac{-3}{2}$ khi $x=0$.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{6}{-3-\sqrt{x}}$.

b) Vì $-\sqrt{x} \leq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $-3-\sqrt{x} \leq -3$ với mọi $x \geq 0$.

Do đó $\frac{6}{-3-\sqrt{x}} \geq \frac{6}{-3} = -2$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}=0$ hay $x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $D = \frac{6}{-3-\sqrt{x}}$ là -2 khi $x = 0$.

Bài 3: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{1}{2} + 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ b) $B = x^2 + |y - 2| - 5$

Phương pháp

Sử dụng kiến thức: $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$; $a^2 \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) $A = \frac{1}{2} + 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$

Ta có: $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0$ với mọi x .

Do đó $A = \frac{1}{2} + 2\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ với mọi x .

Dấu “=” xảy ra là giá trị nhỏ nhất của A, khi đó $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$ hay $x - \frac{1}{2} = 0$, suy ra $x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

b) $B = x^2 + |y - 2| - 5$

Ta có: $x^2 \geq 0$, $|y - 2| \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Do đó $B = x^2 + |y - 2| - 5 \geq 0 + 0 - 5 = -5$

Dấu “=” xảy ra là giá trị nhỏ nhất của B, khi đó $x^2 = 0$ và $|y - 2| = 0$

Suy ra $x = 0$ và $y - 2 = 0$ nên $y = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là -5 khi $x = 0; y = 2$.

Bài 4: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = 8 - 6|x - 2|$ b) $B = \frac{1}{2|x - 1| + 3}$

Phương pháp

- Sử dụng kiến thức: $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

- Nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Lời giải

a) Ta có: $|x - 2| \geq 0$ với mọi x .

Suy ra $-6|x - 2| \leq 0$ với mọi x .

Do đó $8 - 6|x - 2| \leq 8$ với mọi x .

Dấu “=” xảy ra là giá trị lớn nhất của A, khi đó $|x - 2| = 0$, do đó $x - 2 = 0$, suy ra $x = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 8 khi $x = 2$.

b) Ta có: $|x - 1| \geq 0$ với mọi x .

Do đó $2|x - 1| \geq 0$, suy ra $2|x - 1| + 3 \geq 3$ với mọi x .

Suy ra $B = \frac{1}{2|x-1|+3} \leq \frac{1}{3}$ với mọi x .

Dấu “=” xảy ra là giá trị lớn nhất của B, khi đó $|x-1|=0$, do đó $x-1=0$, suy ra $x=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{1}{3}$ khi $x=1$.

Bài 5: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2} + \sqrt{x}$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $P \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là k.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Suy ra $\frac{1}{2} + \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra, tức là $P = \frac{1}{2}$ là giá trị nhỏ nhất của P khi $\sqrt{x} = 0$ suy ra $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$.

Bài 6: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -\sqrt{x^2 + 36} + 2025$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $A \leq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị lớn nhất của A là k.

Lời giải

Ta có: $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x nên $x^2 + 36 \geq 36$ với mọi số thực x .

Suy ra $\sqrt{x^2 + 36} \geq \sqrt{36} = 6$ với mọi số thực x .

Suy ra $A = -\sqrt{x^2 + 36} + 2025 \leq -6 + 2025 = 2019$ hay $A \leq 2019$ với mọi số thực x .

Dấu “=” xảy ra khi $x^2 = 0$ suy ra $x = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 2019 khi $x = 0$.

Bài 7: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 3\sqrt{x} - 2025$ với $x \geq 0$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Đánh giá các số hạng của tổng để tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

Ta có: $x^2 \geq 0$; $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi số thực $x \geq 0$, suy ra $x^2 + 3\sqrt{x} \geq 0$ với mọi số thực $x \geq 0$.

Suy ra $x^2 + 3\sqrt{x} - 2025 \geq -2025$ với mọi số thực $x \geq 0$.

Do đó $A \geq -2025$ với mọi số thực $x \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x^2 = 0$; $\sqrt{x} = 0$, suy ra $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -2025 khi $x = 0$.

Bài 8: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{x^2 + 169} - 2025$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $M \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của M là k.

Lời giải

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + 169 \geq 169$, suy ra $\sqrt{x^2 + 169} \geq \sqrt{169} = 13$.

Do đó $\sqrt{x^2 + 169} - 2025 \geq 13 - 2025 = -2012$.

Dấu “=” xảy ra khi $x^2 = 0$, suy ra $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là -2012 khi $x = 0$.

Bài 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = |3x - 5| + |3x - 9|$.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức: $|a| + |b| \geq |a + b|$

Dấu “=” xảy ra khi $ab \geq 0$.

Đánh giá biểu thức $C \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của C là k.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= |3x - 5| + |3x - 9| = |3x - 5| + |9 - 3x| \\ &\geq |3x - 5 + 9 - 3x| = |4| = 4 \end{aligned}$$

Do đó $C \geq 4$

Dấu “=” xảy ra khi $(3x - 5) \cdot (9 - 3x) \geq 0$

Ta có 2 trường hợp:

TH1: $3x - 5 \geq 0$ và $9 - 3x \geq 0$

Suy ra $x \geq \frac{5}{3}$ và $x \leq 3$ hay $\frac{5}{3} \leq x \leq 3$.

TH2: $3x - 5 \leq 0$ và $9 - 3x \leq 0$

Suy ra $x \leq \frac{5}{3}$ và $x \geq 3$ (loại do không có giá trị nào của x thỏa mãn).

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 4 khi $\frac{5}{3} \leq x \leq 3$.

Bài 10: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |-x - 3| + (y - 1)^2 + (x + 3)^4 + 2$

A. 0.

B. -2.

C. 2.

D. 3.

Phương pháp

Đánh giá biểu thức $A \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của A là k.

Sử dụng kiến thức: $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$;

$b^2 \geq 0, b^4 \geq 0$ với mọi $b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Vì $|-x - 3| \geq 0; (y - 1)^2 \geq 0; (x + 3)^4 \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

$$A = |-x - 3| + (y - 1)^2 + (x + 3)^4 + 2 \geq 0 + 0 + 0 + 2 = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $-x - 3 = 0$; $y - 1 = 0$; $x + 3 = 0$

suy ra $x = -3$; $y = 1$

Vậy min $A = 2$ khi $x = -3$; $y = 1$

Đáp án: C

Bài 11: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x^2 - 4)^2 + |y - 5| - 1$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. -1.

Phương pháp

Đánh giá biểu thức $P \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là k.

Sử dụng kiến thức: $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$; $b^2 \geq 0$ với mọi $b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Ta có: $(x^2 - 4)^2 \geq 0$; $|y - 5| \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ nên $P = (x^2 - 4)^2 + |y - 5| - 1 \geq 0 + 0 - 1 = -1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 - 4 = 0$ và $y - 5 = 0$

$$* x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

$$* y - 5 = 0$$

$$y = 5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1 khi $x \in \{2; -2\}$ và $y = 5$.

Đáp án: D

Bài 12: Giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 10 - \sqrt{x} - (x - 2y + 1)^2$ với $x \geq 0$ là:

A. 10.

B. 11.

C. 1.

D. -10.

Phương pháp

Đánh giá biểu thức $C \leq k$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên giá trị lớn nhất của C là k.

Sử dụng kiến thức: $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$; $b^2 \geq 0$ với mọi $b \in \mathbb{R}$

Dẫn đến $-\sqrt{a} \leq 0$ với mọi $a \geq 0$; $-b^2 \leq 0$ với mọi $b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$, $(x - 2y + 1)^2 \geq 0$ với mọi x, y .

Suy ra $-\sqrt{x} \leq 0$ với mọi $x \geq 0$, $-(x - 2y + 1)^2 \leq 0$ với mọi x, y .

Do đó $-\sqrt{x} - (x - 2y + 1)^2 \leq 0$ với mọi $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$.

Suy ra $C = 10 - \sqrt{x} - (x - 2y + 1)^2 \leq 10 + 0 = 10$ với mọi $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$.

Giá trị lớn nhất của C bằng 10 khi $\sqrt{x} = 0$ và $(x - 2y + 1)^2 = 0$

Suy ra $x = 0$ và $(0 - 2y + 1)^2 = 0$

$$(1 - 2y)^2 = 0$$

$$1 - 2y = 0$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của C bằng 10 khi $x = 0; y = \frac{1}{2}$.

Đáp án: A