

ĐỀ THI CHÍNH THỨC VÀO 10

NĂM HỌC 2025 - 2026

MÔN TOÁN - TỈNH THÁI BÌNH

Câu 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{6\sqrt{x}-8}{x-16} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{2}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4}$, với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Số bài tập về nhà môn Toán đã làm của 40 học sinh trong lớp 9A vào tuần trước được thống kê trong bảng tần số sau:

Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10
Tần số	8	10	12	6	4

Lập bảng tần số tương đối của bảng số liệu trên.

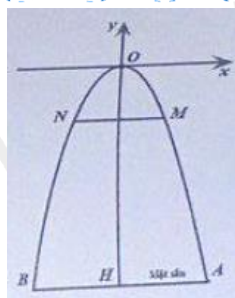
b) Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số tự nhiên từ 1 đến 12, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia hết cho 3"

c) Một bình thủy tinh hình trụ đang chứa nước có bán kính đáy bên trong là $R = 3\sqrt{2}$ cm đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Bạn Nam thả chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc dạng hình cầu có bán kính $r = 3$ cm vào trong bình thì thấy nước trong bình dâng lên x cm ($x > 0$) và không tràn ra ngoài. Tính thể tích của viên bi sắt và tìm giá trị của x .

Câu 3: (2 điểm)

a) Trong thư viện có một giá sách được chia thành hai ngăn I và II. Ban đầu số cuốn sách ở ngăn I nhiều hơn số cuốn sách ở ngăn II là 100 cuốn. Sau khi người ta chuyển 25% số cuốn sách ở ngăn I sang ngăn II thì số cuốn sách ở ngăn I bằng 75% số cuốn sách ở ngăn II. Tính số cuốn sách ở mỗi ngăn lúc ban đầu.

b) Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sân một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (như hình vẽ bên). Biết chiếc cổng có chiều cao $OH = 8$ m, và khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 6$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí song song với đường thẳng AB , từ điểm M đến điểm N, khoảng cách $MN = 3$ m. Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân.



Câu 4: (3 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B và M khác C). Đoạn thẳng MD cắt đoạn thẳng OB tại I , đoạn thẳng OC cắt đoạn thẳng AM tại K .

a) Chứng minh tứ giác $OBMK$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DI \cdot DM = 2R^2$.

c) Tia phân giác của góc $\angle IOM$ cắt MI tại điểm E . Chứng minh rằng $\tan \angle ODI = \frac{EI}{EM}$

d) Cho $IB = 2 \cdot IO$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

Câu 5: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 6\sqrt{2}.$$

----- Hết -----



Câu 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{6\sqrt{x}-8}{x-16} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{2}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4}$, với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=9$.

b) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Lời giải:

a) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức B , ta được:

$$B = \frac{9-\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-4} = \frac{9-3+4}{3-4} = \frac{10}{-1} = -10$$

Vậy $B = -10$ khi $x=9$

b) ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 16$

$$A = \frac{6\sqrt{x}-8}{x-16} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{2}{\sqrt{x}-4}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}-8}{x-16} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} + \frac{2(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} + \frac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} + \frac{2\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}-8+x-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$A = \frac{x+4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

$$\text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

c) ĐK: $x \geq 0; x \neq 16$

Vì $x-\sqrt{x}+4 \neq 0$ và $x \geq 0; x \neq 16$ nên $B \neq 0$, ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} : \frac{x-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-4}{x-\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+4}$$

Với $x = 0$ thì $P = 0$

Với $x \neq 0$ ta có: $\frac{1}{P} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} + 3 = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x}} + 3$

Vì $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ với mọi x nên $\frac{1}{P} \geq 3$ với mọi x

Suy ra $P \leq \frac{1}{3}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 2 = 0$ hay $\sqrt{x} = 2$ hay $x = 4$ (tmđk)

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{3}$ khi $x = 4$

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Số bài tập về nhà môn Toán đã làm của 40 học sinh trong lớp 9A vào tuần trước được thống kê trong bảng tần số sau:

Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10
Tần số	8	10	12	6	4

Lập bảng tần số tương đối của bảng số liệu trên.

b) Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số tự nhiên từ 1 đến 12, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia hết cho 3"

c) Một bình thủy tinh hình trụ đang chứa nước có bán kính đáy bên trong là $R = 3\sqrt{2}$ cm đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Bạn Nam thả chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc dạng hình cầu có bán kính $r = 3$ cm vào trong bình thì thấy nước trong bình dâng lên x cm ($x > 0$) và không tràn ra ngoài. Tính thể tích của viên bi sắt và tìm giá trị của x .

Lời giải:

a) Ta có bảng tần số tương đối:

Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10
Tần số tương đối	20%	25%	30%	15%	10%

b) Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$ có 12 phần tử

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố A là: 3; 6; 9; 12.

Xác suất của biến cố A là: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Thể tích của viên bi sắt là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi (\text{cm}^3)$

Vì thể tích nước dâng lên bằng thể tích của viên bi nên ta có:

$$\pi R^2 x = 36\pi$$

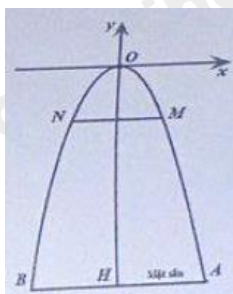
$$\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot x = 36\pi$$

$$18\pi x = 36\pi$$

Suy ra $x = 2$ (cm)

Câu 3: (2 điểm) a) Trong thư viện có một giá sách được chia thành hai ngăn I và II. Ban đầu số cuốn sách ở ngăn I nhiều hơn số cuốn sách ở ngăn II là 100 cuốn. Sau khi người ta chuyển 25% số cuốn sách ở ngăn I sang ngăn II thì số cuốn sách ở ngăn I bằng 75% số cuốn sách ở ngăn II. Tính số cuốn sách ở mỗi ngăn lúc ban đầu.

b) Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sân một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (như hình vẽ bên). Biết chiếc cổng có chiều cao $OH = 8\text{m}$, và khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 6\text{m}$. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí song song với đường thẳng AB , từ điểm M đến điểm N , khoảng cách $MN = 3\text{m}$. Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân.



Lời giải:

a) Gọi số cuốn sách ban đầu ở ngăn I là x (cuốn), $x > 100$, $x \in \mathbb{N}^*$

Số cuốn sách ban đầu ở ngăn II là y (cuốn), $y \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Có } y = x - 100$$

Chuyển 25% số sách ngăn I sang ngăn II. Khi đó,

Số cuốn sách còn lại ở ngăn I là $x - 0,25x = 0,75x$ (cuốn).

Số cuốn sách ở ngăn II là $y + 0,25x$ (cuốn).

Sau khi chuyển, số cuốn sách ở ngăn I bằng 75% số cuốn sách ở ngăn II:

$$0,75x = 0,75(y + 0,25x) \quad (1)$$

Thay $y = x - 100$ vào phương trình (1), có

$$0,75x = 0,75(x - 100 + 0,25x)$$

$$0,75x = 0,75(1,25x - 100)$$

$$0,75x = 0,9375x - 75$$

$$0,1875x = 75$$

$$x = 400 \text{ (TM)}$$

$$\text{Suy ra } y = 400 - 100 = 300 \text{ (TM)}$$

Vậy số sách ban đầu ở ngăn I là 400 cuốn, số sách ban đầu ở ngăn II là 300 cuốn.

b) Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 6\text{m}$ suy ra $AH = 3\text{m}$

Điểm A có hoành độ bằng 3, tung độ bằng -8, A thuộc parabol nên ta có

$$-8 = a.3^2$$

$$-8 = a.9$$

$$a = \frac{-8}{9}$$

Suy ra parabol: $y = \frac{-8}{9}x^2$.

Có $MN = 3\text{m}$ suy ra điểm N có hoành độ bằng -1,5 và tung độ y_N

Điểm N thuộc parabol nên ta có $y_N = \frac{-8}{9}.(-1,5)^2 = -2$

Suy ra toạ độ của dây đèn thấp hơn chiếc cổng 2m

Vậy khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân là $8 - 2 = 6 \text{ (m)}$.

Câu 4: (3 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B và M khác C). Đoạn thẳng MD cắt đoạn thẳng OB tại I , đoạn thẳng OC cắt đoạn thẳng AM tại K .

a) Chứng minh tứ giác $OBMK$ nội tiếp.

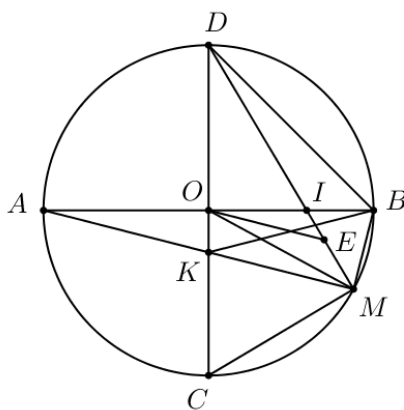
b) Chứng minh rằng $DI \cdot DM = 2R^2$.

c) Tia phân giác của góc $\angle IOM$ cắt MI tại điểm E . Chứng minh rằng $\tan \angle ODI = \frac{EI}{EM}$

d) Cho $IB = 2 \cdot IO$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

Lời giải:

a)



Do $AB \perp CD$ tại O nên ΔKOB vuông tại O hay O, K, B cùng thuộc đường tròn đường kính KB

Có $M \in (O)$ nên $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Khi đó $\triangle MKB$ vuông tại M nên M, K, B cùng thuộc đường tròn đường kính KB

Vậy M, K, B, O cùng thuộc đường tròn đường kính KB hay tứ giác OBMK nội tiếp.

b) Ta có $\angle DMB = \frac{1}{2} \text{sd } DB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ và $\angle DBI = \frac{1}{2} \text{sd } AD = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ nên $\angle DMB = \angle DBI$

Xét $\triangle DIB$ và $\triangle DBM$ có $\angle DMB = \angle DBI$ và $\angle MDB$ chung

Nên $\triangle DIB \sim \triangle DBM$ (g.g) suy ra $\frac{DI}{DB} = \frac{DB}{DM}$ hay $DI \cdot DM = DB^2$

Mà $DB^2 = OD^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ nên $DI \cdot DM = 2R^2$

c) Do OE là phân giác của góc MOI nên $\frac{IE}{EM} = \frac{OI}{OM} = \frac{OI}{OD}$ (tính chất đường phân giác)

Mà $\triangle OID$ vuông tại O nên $\tan \angle ODI = \frac{OI}{OD}$

Vậy $\tan \angle ODI = \frac{EI}{EM}$

d) Gọi $IO = x$ thì $IB = 2 \cdot IO = 2x$.

Khi đó $DI = \sqrt{OI^2 + OD^2} = \sqrt{x^2 + R^2}$ và $BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = R\sqrt{2}$

Theo b) ta có $\triangle DIB \sim \triangle DBM$ (g.g) nên $\frac{DI}{DB} = \frac{IB}{MB}$ nên $MB = \frac{IB \cdot DB}{DI} = \frac{2x \cdot R\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

Ta có $\sin \angle IDO = \frac{OI}{DI} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$ và $\sin \angle MDC = \frac{MC}{DC} = \frac{MC}{2R}$ suy ra $\frac{MC}{2R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

Suy ra $MC = \frac{2xR}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

Vậy $\frac{MB}{MC} = \frac{2x \cdot R\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + R^2}} : \frac{2xR}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{2x \cdot R\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + R^2}}{2xR} = \sqrt{2}$

Câu 5: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 6\sqrt{2}.$$

Lời giải:

Đặt $A = \sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}}$

Vì $a + b + c = 3$ nên ta có:

$$\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot a + \frac{(b-c)^2}{2}} = \sqrt{2 \cdot (a+b+c) \cdot a + \frac{(b-c)^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2a^2 + 2ab + 2ac + \frac{(b-c)^2}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{4a^2 + 4ab + 4ac + (b-c)^2}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{4a^2 + 4a(b+c) + (b+c)^2 - 4bc}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(2a+b+c)^2 - 4bc}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(2a+b+c)^2}{2} - 2bc} \leq \sqrt{\frac{(2a+b+c)^2}{2}} = \frac{2a+b+c}{\sqrt{2}} \text{ (vì } b, c \text{ không âm)}
 \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} &\leq \frac{2b+a+c}{\sqrt{2}} \\
 \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} &\leq \frac{2c+a+b}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A \leq \frac{4a+4b+4c}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=0, c=3$ và các hoán vị.