

CHUYÊN ĐỀ 4:

CÁC ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ

ÔN HÈ MÔN: TOÁN - LỚP 7



BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

A. Lý thuyết

* Tính chất của tỉ lệ thức:

- Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.

- Nếu $ad = bc$ (với $a, b, c, d \neq 0$) thì ta có bốn tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

* Tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

- Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

- Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ suy ra:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+b+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} \quad (\text{giả thiết các tỉ số đều có nghĩa})$$

* Đặt “k”

Bước 1: Đặt tỉ lệ thức ban đầu có giá trị bằng k .

Bước 2. Biểu diễn tử theo tích của k với các mẫu tương ứng.

Bước 3. Thay các giá trị vừa có vào đẳng thức cần chứng minh để dẫn đến một hệ thức đúng.

B. Bài tập

Bài 1: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad (a+b \neq 0, c+d \neq 0).$

Bài 2: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

b) $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$.

Bài 3: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

b) $\frac{3a-2c}{3b-2d} = \frac{a+3c}{b+3d}$

Bài 4: Chứng minh rằng nếu $a^2 = bc$ (với $a \neq b$ và $a \neq c$) thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$.

Bài 5: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{a}{3a+b} = \frac{c}{3c+d}$.

Bài 6: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{ab}{cd} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$.

Bài 7: Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Bài 8: Cho $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$. Chứng minh $\frac{x}{y+z} = \frac{1}{2}$.

Bài 9: Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

Bài 10: Cho $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 1$ và $x:y:z = a:b:c$.

Chứng minh rằng $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$.

-----Hết-----

Hướng dẫn giải chi tiết

Bài 1: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ($a+b \neq 0, c+d \neq 0$).

Phương pháp

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$; $\frac{c+d}{d} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} = \frac{c}{d} + 1$.

Từ đó viết lại $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ suy ra điều phải chứng minh.

b) Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$.

Do đó $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

b) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, suy ra $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$.

Do đó $\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$, vì vậy $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

Bài 2: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

b) $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$.

Phương pháp

a) Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức, đưa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ về $ad = bc$.

Cộng cả hai vế của đẳng thức với ab , đưa về dạng tỉ lệ thức.

b) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$, biểu diễn a, c theo t .

Thay hai vế của đẳng thức bởi t để chứng minh.

Lời giải

$$a) \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $ad = bc$, do đó $ad + ab = bc + ab$

Suy ra $a(d+b) = b(c+a)$, do đó $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

$$b) \frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}.$$

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$, suy ra $a = bt; c = dt$.

Xét vế trái:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bt \cdot dt}{bd} = \frac{bdt^2}{bd} = t^2.$$

Xét vế phải:

$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{(bt)^2+(dt)^2}{b^2+d^2} = \frac{b^2t^2+d^2t^2}{b^2+d^2} = \frac{(b^2+d^2)t^2}{b^2+d^2} = t^2.$$

Do đó $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$.

Bài 3: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh:

$$a) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$b) \frac{3a-2c}{3b-2d} = \frac{a+3c}{b+3d}$$

Phương pháp

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh.

Lời giải

$$a) \text{ Vì } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ nên } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ nên } \frac{a}{b} = \frac{3a}{3b} = \frac{-2c}{-2d} = \frac{c}{d} = \frac{3a-2c}{3b-2d}.$$

Tương tự ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3c}{3d} = \frac{a+3c}{b+3d}$.

Do đó $\frac{3a-2c}{3b-2d} = \frac{a+3c}{b+3d}$.

Bài 4: Chứng minh rằng nếu $a^2 = bc$ (với $a \neq b$ và $a \neq c$) thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$.

Phương pháp

Từ $a^2 = bc$ lập tỉ lệ thức.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh.

Lời giải

Vì $a^2 = bc$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{c+a} = \frac{a-b}{c-a}$$

Do đó $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$.

Bài 5: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{a}{3a+b} = \frac{c}{3c+d}$.

Phương pháp

Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Do đó $\frac{a}{c} = \frac{3a}{3c} = \frac{b}{d}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{3a}{3c} = \frac{b}{d} = \frac{3a+b}{3c+d}$$

Suy ra $\frac{a}{c} = \frac{3a+b}{3c+d}$.

Do đó $\frac{a}{3a+b} = \frac{c}{3c+d}$

Bài 6: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{ab}{cd} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$.

Phương pháp

Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh.

Lời giải

Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Ta có: $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{a-b}{c-d} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$.

Vậy $\frac{ab}{cd} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$.

Bài 7: Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Phương pháp

Nhân cả tử và mẫu của $\frac{bz-cy}{a}$ với x ;

Nhân cả tử và mẫu của $\frac{cx-az}{b}$ với y ;

Nhân cả tử và mẫu của $\frac{ay-bx}{c}$ với z .

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = 0$

Suy ra các tỉ số tương ứng cần chứng minh.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{bz - cy}{a} &= \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} \\ &= \frac{bxz - cxy}{ax} = \frac{cxy - ayz}{by} = \frac{ayz - bxz}{cz} \\ &= \frac{bxz - cxy + cxy - ayz + ayz - bxz}{ax + by + cz} \\ &= \frac{0}{ax + by + cz} = 0 \end{aligned}$$

$$+) \frac{bz - cy}{a} = 0 \text{ suy ra } bz - cy = 0 \text{ nên } bz = cy, \text{ suy ra } \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \quad (1)$$

$$+) \frac{cx - az}{b} = 0 \text{ suy ra } cx - az = 0 \text{ nên } cx = az, \text{ suy ra } \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \quad (2)$$

$$+) \frac{ay - bx}{c} = 0 \text{ suy ra } ay - bx = 0 \text{ nên } ay = bx, \text{ suy ra } \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Bài 8: Cho $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$. Chứng minh $\frac{x}{y+z} = \frac{1}{2}$.

Phương pháp

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{y+z+z+x+x+y} = \frac{x+y+z}{2x+2y+2z} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y+z} = \frac{1}{2}.$$

Bài 9: Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

Phương pháp

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$$

Ta có: $\frac{a}{d} = \frac{abc}{bcd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3$.

Bài 10: Cho $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$ và $x:y:z=a:b:c$.

Chứng minh rằng $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Phương pháp

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$.

Lời giải

Vì $x:y:z=a:b:c$ nên $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x+y+z$ (do $a+b+c=1$)

suy ra $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = (x+y+z)^2$

Ta lại có $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2+y^2+z^2$ (do $a^2+b^2+c^2=1$)

Vậy $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$.