

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH PHÚC
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025-2026
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Viết vào tờ giấy thi đáp án đúng mà em chọn (Ví dụ: Câu 1 nếu chọn A là đúng thì viết Câu 1: A).

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+2025}$ là

- A. $x \leq -2025$. B. $x < -2025$. C. $x > -2025$. D. $x \geq -2025$.

Câu 2. Cặp số $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $2x - 3y = 12$. B. $3x - y = 1$. C. $x + y = 5$. D. $x - 2y = 1$.

Câu 3. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 4. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

- A. -6 . B. -5 . C. 6 . D. 5 .

Câu 5. Thống kê điểm kiểm tra học kỳ 2 của lớp 9A thu được bảng như sau:

Điểm	5	6	7	8	9
Số học sinh	2	8	9	10	8

Theo bảng số liệu trên, lớp 9A có bao nhiêu học sinh đạt điểm 7?

- A. 10. B. 8. C. 9. D. 7.

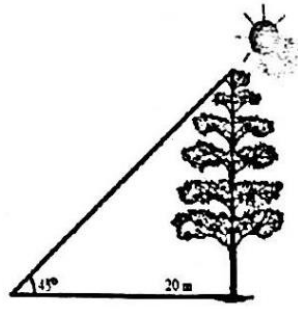
Câu 6. Người ta thống kê lại chiều cao một loại cây sau một năm tuổi cho ở bảng ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	9	8

Giá trị đại diện của nhóm $[50; 55)$ bằng

- A. 50. B. 52,5. C. 55. D. 18.

Câu 7. Bóng của một cái cây do ánh nắng mặt trời chiếu xuống mặt đất dài 20 m. Biết rằng các tia sáng của ánh nắng mặt trời song song với nhau và tạo với mặt đất một góc 45° (tham khảo hình vẽ bên). Chiều cao của cái cây đó là



- A. $20\sqrt{2}$ m. B. 10 m. C. 20 m. D. $10\sqrt{2}$ m.

Câu 8. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 5 dm và chiều cao bằng 6 dm. Thể tích của khối trụ đó là

- A. 150π dm³. B. 30π dm³. C. 50π dm³. D. 60π dm³.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

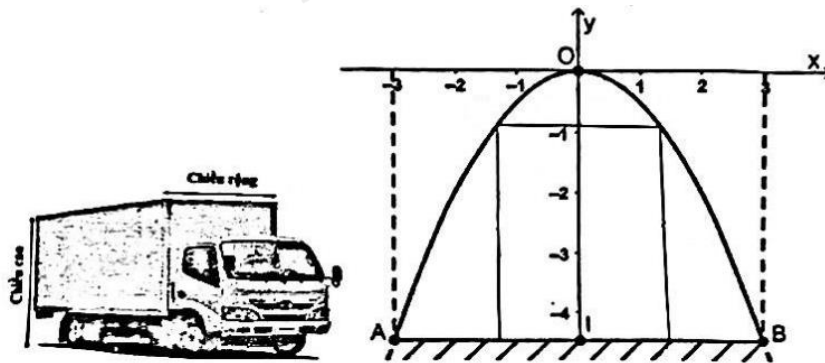
Câu 1. (1,0 điểm). Trong một hộp kín đựng 10 tấm thẻ được đánh số tự nhiên từ 1 đến 10, không có hai thẻ nào được đánh số giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp đã cho. Tính xác suất của biến cố A: “Lấy được thẻ ghi số chẵn”.

Câu 2. (1,0 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với điều kiện $x > 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của x để $23x \cdot P = 2025$.

Câu 3. (1,0 điểm). Một cái cổng được thiết kế dạng parabol có phương trình biểu diễn trong hệ trục tọa độ Oxy là $y = ax^2$ (với a là hằng số khác 0). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là AB = 6m, chiều cao từ điểm chính giữa cổng đến mặt đất là OI = 4,5m (tham khảo hình vẽ sau).



a) Tìm hệ số a dựa vào dữ kiện đã cho.

b) Một xe tải có chiều rộng bằng 2m, chiều cao bằng 3,2m (tham khảo hình vẽ trên) đi vào chính giữa cổng trên. Hỏi xe tải này có thể đi qua được cổng đó mà không chạm vào cổng hay không? Giải thích lý do.

Câu 4. (1,0 điểm). Bác Vĩnh và bác Phúc cùng gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với tổng số tiền là 900 triệu đồng. Bác Vĩnh gửi vào ngân hàng A với lãi suất 7% một năm, bác Phúc gửi vào ngân hàng B với lãi suất 6% một năm. Sau khi gửi được đúng một năm, tổng số tiền lãi mà hai bác nhận được là 60 triệu đồng. Hỏi ban đầu mỗi bác gửi tiết kiệm bao nhiêu tiền?

Câu 5. (3,0 điểm). Cho nửa đường tròn đường kính AB, có tâm là điểm O. Đường thẳng đi qua tâm O và vuông góc với đường kính AB cắt nửa đường tròn đã cho tại điểm C. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D (D không trùng với C), kẻ CH vuông góc với đường thẳng BD tại điểm H.

a) Chứng minh tứ giác OBHC nội tiếp.

b) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng HO và BC. Chứng minh HO là tia phân giác của $\angle CHB$ và $CE \cdot CH = BE \cdot HD$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại điểm K (K không trùng với C). Chứng minh $DE > 2 \cdot CK$.

Câu 6. (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + 4bc + 4ca = 28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } T = \frac{11a + 11b + 24c}{\sqrt{8a^2 + 224} + \sqrt{8b^2 + 224} + \sqrt{16c^2 + 28}}.$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI VÀO 10 NĂM HỌC 2025 - 2026

MÔN TOÁN – TỈNH VĨNH PHÚC

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

1.D	2.B	3.A	4.D	5.C	6.B
7.C	8.A				

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+2025}$ là

- A. $x \leq -2025$. B. $x < -2025$. C. $x > -2025$. D. $x \geq -2025$.

Phương pháp:

Điều kiện xác định của căn thức bậc hai $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

Lời giải:

Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+2025}$ là $x+2025 \geq 0$, suy ra $x \geq -2025$.

Đáp án: D

Câu 2. Cặp số $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $2x - 3y = 12$. B. $3x - y = 1$. C. $x + y = 5$. D. $x - 2y = 1$.

Phương pháp:

Thay $x = 1; y = 2$ vào các phương trình để tính.

Lời giải:

Thay $x = 1; y = 2$ vào các phương trình, ta được:

$$2.1 - 3.2 = -4 \neq 12$$

$$3.1 - 2 = 1$$

$$1 + 2 = 3 \neq 5$$

$$1 - 2.2 = -3 \neq 1$$

nên $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình $3x - y = 1$.

Đáp án: B

Câu 3. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(1; 2)$.

Phương pháp:

Đối với bài tập trắc nghiệm, sử dụng máy tính cầm tay để bấm nghiệm.

Lời giải:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Đáp án: A

Câu 4. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A. -6. B. -5. C. 6. D. 5.

Phương pháp:

Đối với bài tập trắc nghiệm, sử dụng máy tính cầm tay để bấm nghiệm.

Lời giải:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3; x_2 = 2$.

Suy ra $x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5$.

Đáp án: D

Câu 5. Thống kê điểm kiểm tra học kỳ 2 của lớp 9A thu được bảng như sau:

Điểm	5	6	7	8	9
Số học sinh	2	8	9	10	8

Theo bảng số liệu trên, lớp 9A có bao nhiêu học sinh đạt điểm 7?

A. 10. B. 8. C. 9. D. 7.

Phương pháp:

Quan sát bảng số liệu để xác định.

Lời giải:

Lớp 9A có 9 học sinh đạt điểm 7.

Đáp án: C

Câu 6. Người ta thống kê lại chiều cao một loại cây sau một năm tuổi cho ở bảng ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	9	8

Giá trị đại diện của nhóm [50; 55) bằng

A. 50. B. 52,5. C. 55. D. 18.

Phương pháp:

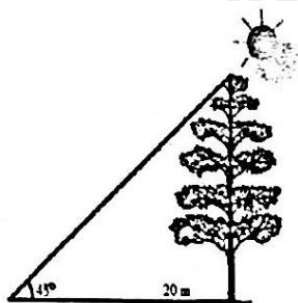
Giá trị đại diện của nhóm $[a, b)$ là $\frac{a+b}{2}$.

Lời giải:

Giá trị đại diện của nhóm $[50;55)$ bằng $\frac{50+55}{2} = 52,5$.

Đáp án: B

Câu 7. Bóng của một cái cây do ánh nắng mặt trời chiếu xuống mặt đất dài 20 m. Biết rằng các tia sáng của ánh nắng mặt trời song song với nhau và tạo với mặt đất một góc 45° (tham khảo hình vẽ bên). Chiều cao của cái cây đó là



- A. $20\sqrt{2}$ m. B. 10 m. C. 20 m. D. $10\sqrt{2}$ m.

Phương pháp:

Xác định hệ thức lượng tương ứng rồi tính chiều cao cây.

Lời giải:

Chiều cao của cái cây đó là: $20 \cdot \tan 45^\circ = 20(m)$

Đáp án: C

Câu 8. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 5 dm và chiều cao bằng 6 dm. Thể tích của khối trụ đó là

- A. 150π dm³. B. 30π dm³. C. 50π dm³. D. 60π dm³.

Phương pháp:

Thể tích khối trụ bằng diện tích đáy nhân chiều cao.

Lời giải:

Thể tích của khối trụ đó là: $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi (dm^3)$.

Đáp án: A

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 1. (1,0 điểm). Trong một hộp kín đựng 10 tấm thẻ được đánh số tự nhiên từ 1 đến 10, không có hai thẻ nào được đánh số giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp đã cho. Tính xác suất của biến cố A: “Lấy được thẻ ghi số chẵn”.

Phương pháp:

Xác định số phần tử của không gian mẫu.

Xác định các kết quả thuận lợi cho biến cố.

Xác suất của biến cố = số kết quả thuận lợi : số phần tử của không gian mẫu.

Lời giải:

Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ gồm 10 phần tử

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A là 2; 4; 6; 8; 10

Vậy xác suất của biến cố A là $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Câu 2. (1,0 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với điều kiện $x > 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của x để $23x \cdot P = 2025$.

Phương pháp:

a) Kết hợp các tính chất của phân thức để rút gọn biểu thức P.

b) Giải phương trình $23x \cdot P = 2025$.

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t > 0$) để đưa phương trình về phương trình bậc hai một ẩn.

Giải phương trình để tìm t, tính giá trị x tương ứng.

Lời giải:

$$a) P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \text{ (với điều kiện } x > 0, x \neq 1)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \text{ với điều kiện } x > 0, x \neq 1.$$

$$b) 23x \cdot P = 2025 \text{ (với điều kiện } x > 0, x \neq 1)$$

$$23x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+1} = 2025$$

$$46x = 2025(\sqrt{x}+1)$$

$$46x - 2025\sqrt{x} - 2025 = 0 (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t > 0$). Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$46t^2 - 2025t - 2025 = 0 (**)$$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-2025)^2 - 4 \cdot 46 \cdot (-2025) = 4473225 > 0$.

Do đó, phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt:

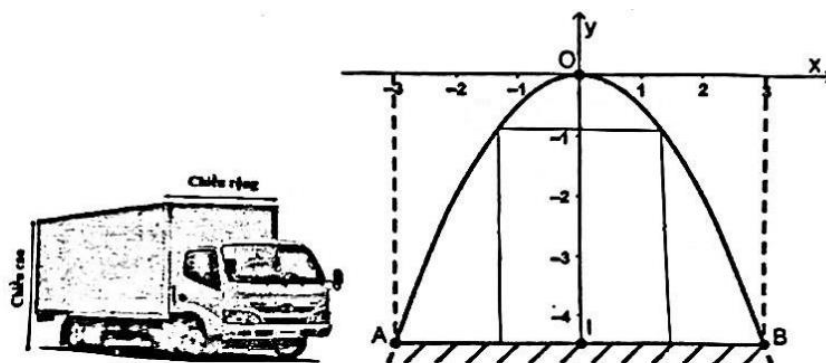
$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2025) + \sqrt{4473225}}{2 \cdot 46} = 45 \text{ (TM);}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2025) - \sqrt{4473225}}{2 \cdot 46} = \frac{45}{46} \text{ (loại).}$$

Với $t_1 = 45$ thì $\sqrt{x} = 45$, suy ra $x = 2025$ (thỏa mãn).

Vậy để $23x.P = 2025$ thì $x = 2025$.

Câu 3. (1,0 điểm). Một cái cổng được thiết kế dạng parabol có phương trình biểu diễn trong hệ trục tọa độ Oxy là $y = ax^2$ (với a là hằng số khác 0). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 6m$, chiều cao từ điểm chính giữa cổng đến mặt đất là $OI = 4,5m$ (tham khảo hình vẽ sau).



a) Tìm hệ số a dựa vào dữ kiện đã cho.

b) Một xe tải có chiều rộng bằng 2m, chiều cao bằng 3,2m (tham khảo hình vẽ trên) đi vào chính giữa cổng trên. Hỏi xe tải này có thể đi qua được cổng đó mà không chạm vào cổng hay không? Giải thích lý do.

Phương pháp:

a) Thay tọa độ một điểm thuộc đồ thị hàm số để tìm a .

b) Lấy điểm E, F biểu thị EF là chiều rộng của xe.

Từ đó xác định giá trị x_F , suy ra $y = ax^2$ tương ứng để xác định chiều cao tối đa xe có thể đi qua được cổng.

Lời giải:

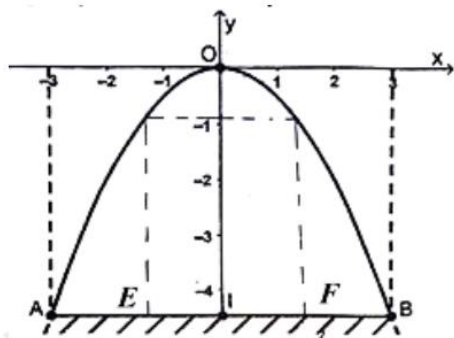
a) Vì parabol đi qua điểm $A(-3; -4,5)$ nên ta có

$$-4,5 = a \cdot (-3)^2$$

$$a = \frac{-4,5}{(-3)^2} = \frac{-4,5}{9} = -\frac{1}{2}$$

Vậy hệ số $a = -\frac{1}{2}$.

b)



Chiếc xe tải có chiều rộng bằng 2m nên khoảng cách $EI = IF = \frac{2}{2} = 1$ (m).

Với $x = 1$ thì $y = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$ nên chiều cao tối đa của chiếc xe có thể đi qua cổng là:

$$4,5 - \left| -\frac{1}{2} \right| = 4,5 - \frac{1}{2} = 4 > 3,2$$

Vậy xe tải này có thể đi qua được cổng đó mà không chạm vào cổng.

Câu 4. (1,0 điểm). Bác Vĩnh và bác Phúc cùng gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với tổng số tiền là 900 triệu đồng. Bác Vĩnh gửi vào ngân hàng A với lãi suất 7% một năm, bác Phúc gửi vào ngân hàng B với lãi suất 6% một năm. Sau khi gửi được đúng một năm, tổng số tiền lãi mà hai bác nhận được là 60 triệu đồng. Hỏi ban đầu mỗi bác gửi tiết kiệm bao nhiêu tiền?

Phương pháp:

Gọi số tiền bác Vĩnh gửi là x (triệu đồng), $0 < x < 900$, biểu diễn số tiền bác Phúc gửi theo x .

Biểu diễn số tiền lãi mỗi người nhận được theo x .

Vì tổng số tiền lãi cả hai bác nhận được là 60 triệu đồng nên ta lập được phương trình.

Giải phương trình để tìm x .

Lời giải:

Gọi số tiền bác Vĩnh gửi là x (triệu đồng), $0 < x < 900$.

Số tiền bác Phúc gửi là $900 - x$ (triệu đồng).

Bác Vĩnh gửi với lãi suất 7% một năm, tức là số tiền lãi: $0,07x$ (triệu đồng).

Bác Phúc gửi với lãi suất 6% một năm, tức là số tiền lãi: $0,06(900 - x)$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lãi cả hai bác nhận được là: $0,07x + 0,06(900 - x)$ (triệu đồng).

Vì tổng số tiền lãi cả hai bác nhận được là 60 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$0,07x + 0,06(900 - x) = 60$$

$$0,07x + 54 - 0,06x - 60 = 0$$

$$0,01x - 6 = 0$$

$$x = 600 \text{ (TM)}$$

Vậy số tiền ban đầu bác Vĩnh gửi là 600 triệu đồng, số tiền bác Phúc gửi là 300 triệu đồng.

Câu 5. (3,0 điểm). Cho nửa đường tròn đường kính AB, có tâm là điểm O. Đường thẳng đi qua tâm O và vuông góc với đường kính AB cắt nửa đường tròn đã cho tại điểm C. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D (D không trùng với C), kẻ CH vuông góc với đường thẳng BD tại điểm H.

a) Chứng minh tứ giác OBHC nội tiếp.

b) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng HO và BC. Chứng minh HO là tia phân giác của $\angle CHB$ và $CE \cdot CH = BE \cdot HD$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại điểm K (K không trùng với C). Chứng minh $DE > 2 \cdot CK$.

Phương pháp:

a) Chứng minh $\triangle COB$ vuông tại O, $\triangle CBH$ vuông tại H nên C, H, B, O cùng thuộc đường tròn đường kính CB hay tứ giác OBHC nội tiếp.

b) Chứng minh $\triangle OBC$ vuông cân tại O nên $\angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$

Kết hợp với $\angle CHO = \angle CBO = 45^\circ$ và $\angle OHB = \angle OCB = 45^\circ$

suy ra $\angle CHO = \angle OHB = 45^\circ$ hay OH là phân giác của $\angle CHB$.

Áp dụng tính chất đường phân giác có $\frac{CE}{BE} = \frac{CH}{HB}$

Kết hợp với $\frac{DH}{CH} = \frac{HC}{HB}$

suy ra $DH \cdot BE = CE \cdot CH$.

c) Kẻ đường kính CM của (O). Do $K \in (O)$ nên $KM \perp CK$.

Chứng minh D, K, M thẳng hàng.

Gọi E' là giao điểm của CB và DM.

Chứng minh HE' là phân giác của $\angle CHB$.

Mà HE là phân giác của $\angle CHB$ nên $E = E'$ hay D, E, K, M thẳng hàng.

Chứng minh $\triangle CDK \sim \triangle ECK$ (g.g) suy ra $CK^2 = EK \cdot DK$.

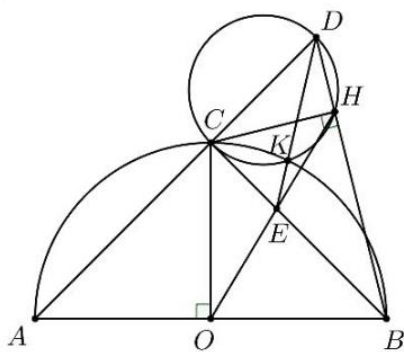
Dẫn đến $CK^2 \leq \frac{DE^2}{4}$ suy ra $DE \geq 2CK$.

Chứng minh DE không thể bằng CK.

Do đó $DE > 2CK$.

Lời giải:

a)



Do $OC \perp AB$ tại O nên $\triangle COB$ vuông tại O nên C, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính CB.

Có $CH \perp BD$ tại H nên $\triangle CBH$ vuông tại H nên C, H, B cùng thuộc đường tròn đường kính CB.

Vậy C, H, B, O cùng thuộc đường tròn đường kính CB hay tứ giác OBHC nội tiếp.

b) Ta có $OC = OB$ (cùng bằng bán kính của (O)) nên $\triangle OBC$ vuông cân tại O.

Khi đó $\angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$.

Do OBHC nội tiếp nên $\angle CHO = \angle CBO = 45^\circ$ (cùng chắn cung CO).

và $\angle OHB = \angle OCB = 45^\circ$ (cùng chắn cung OB).

Suy ra $\angle CHO = \angle OHB = 45^\circ$ hay OH là phân giác của $\angle CHB$.

Do OH là phân giác của $\angle CHB$ nên $\frac{CE}{BE} = \frac{CH}{HB}$ (tính chất đường phân giác).

Do $C \in (O)$ nên $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $CB \perp CD$ tại C.

Suy ra $\angle DCH + \angle HCB = 90^\circ$.

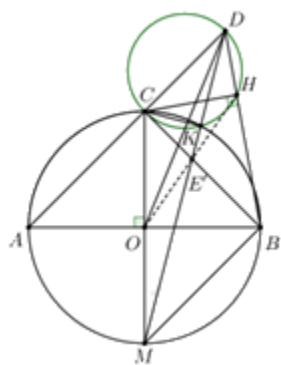
Mà $\angle CBH + \angle BCH = 180^\circ - \angle CHB = 90^\circ$ nên $\angle DCH = \angle CBH$ (cùng cộng $\angle BCH$ bằng 90°).

Kết hợp $\angle CHB = \angle CHD = 90^\circ$ suy ra $\triangle DHC \sim \triangle CHB$ (g.g).

Suy ra $\frac{DH}{CH} = \frac{HC}{HB}$.

Mà $\frac{CE}{BE} = \frac{CH}{HB}$ nên $\frac{DH}{CH} = \frac{CE}{BE}$ hay $DH \cdot BE = CE \cdot CH$.

c)



Kẻ đường kính CM của (O) . Do $K \in (O)$ nên $KM \perp CK$.

Lại có K thuộc đường tròn đường kính CD nên $\angle CKD = 90^\circ$ hay $DK \perp CK$.

Suy ra D, K, M thẳng hàng.

Gọi E' là giao điểm của CB và DM.

Do CM là đường kính nên $\angle CBM = 90^\circ$ nên $BM \perp CB$.

Mà $CD \perp BC$ nên $BM \parallel CD$.

Khi đó $\frac{CE'}{E'B} = \frac{CD}{BM}$ (Thales). Mà $BM = BC$ nên $\frac{CD}{BM} = \frac{CD}{BC} = \tan \angle CBD = \frac{CH}{BH}$

Vậy $\frac{CE'}{E'B} = \frac{CH}{HB}$ suy ra HE' là phân giác của $\angle CHB$.

Mà HE là phân giác của $\angle CHB$ nên $E = E'$ hay D, E, K, M thẳng hàng.

Ta có $\angle CDE = \angle ECK$ (cùng cộng với $\angle DCK$ bằng 90°).

Kết hợp $\angle CKD = \angle CKE = 90^\circ$. Khi đó $\triangle CDK \sim \triangle ECK$ (g.g).

Suy ra $\frac{CK}{EK} = \frac{DK}{CK}$ hay $CK^2 = EK \cdot DK$.

Lại có $EK \cdot DK \leq \frac{(EK + DK)^2}{4} = \frac{DE^2}{4}$ nên $CK^2 \leq \frac{DE^2}{4}$.

Suy ra $CK \leq \frac{DE}{2}$ hay $DE \geq 2CK$.

Dấu “=” xảy ra khi K là trung điểm của DE hay K phải thỏa mãn $\angle KCD = 45^\circ$, mà $\angle ACM = 45^\circ$ nên $\angle MCK = 90^\circ$ (vô lý).

Vậy $DE > 2CK$ (đpcm).

Câu 6. (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + 4bc + 4ca = 28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{11a + 11b + 24c}{\sqrt{8a^2 + 224} + \sqrt{8b^2 + 224} + \sqrt{16c^2 + 28}}$.

Phương pháp:

Từ $ab + 4bc + 4ca = 28$ suy ra $\sqrt{8a^2 + 224} = \sqrt{(2a + 8c)(4a + 4b)}$.

Tương tự $\sqrt{8b^2 + 224} = \sqrt{(2b+8c)(4a+4b)}$ và $\sqrt{16c^2 + 28} = \sqrt{(a+4c)(b+4c)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm suy ra:

$$\sqrt{8a^2 + 224} \leq \frac{6a + 4b + 8c}{2}$$

$$\sqrt{8b^2 + 224} \leq \frac{4a + 6b + 8c}{2}$$

$$\sqrt{16c^2 + 28} \leq \frac{a + b + 8c}{2}$$

Suy ra GTLN của $\sqrt{8a^2 + 224} + \sqrt{8b^2 + 224} + \sqrt{16c^2 + 28}$, suy ra GTNN của T.

Lời giải:

Vì $ab + 4bc + 4ca = 28$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{8a^2 + 224} &= \sqrt{8a^2 + 8(ab + 4bc + 4ca)} \\ &= \sqrt{8a^2 + 8ab + 32bc + 32ca} = \sqrt{(2a+8c)(4a+4b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8b^2 + 224} &= \sqrt{8b^2 + 8(ab + 4bc + 4ca)} \\ &= \sqrt{8b^2 + 8ab + 32bc + 32ca} = \sqrt{(2b+8c)(4a+4b)}\end{aligned}$$

$$\sqrt{16c^2 + 28} = \sqrt{16c^2 + ab + 4bc + 4ca} = \sqrt{(a+4c)(b+4c)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{8a^2 + 224} = \sqrt{(2a+8c)(4a+4b)} \leq \frac{(2a+8c) + (4a+4b)}{2} = \frac{6a+4b+8c}{2}$$

$$\sqrt{8b^2 + 224} = \sqrt{(2b+8c)(4a+4b)} \leq \frac{(2b+8c) + (4a+4b)}{2} = \frac{4a+6b+8c}{2}$$

$$\sqrt{16c^2 + 28} = \sqrt{(a+4c)(b+4c)} \leq \frac{(a+4c) + (b+4c)}{2} = \frac{a+b+8c}{2}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}&\sqrt{8a^2 + 224} + \sqrt{8b^2 + 224} + \sqrt{16c^2 + 28} \\ &\leq \frac{6a+4b+8c}{2} + \frac{4a+6b+8c}{2} + \frac{a+b+8c}{2} = \frac{11a+11b+24c}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } T = \frac{11a+11b+24c}{\sqrt{8a^2 + 224} + \sqrt{8b^2 + 224} + \sqrt{16c^2 + 28}} \geq \frac{11a+11b+24c}{\frac{11a+11b+24c}{2}} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$2a+8c = 4a+4b$$

$$2b + 8c = 4a + 4b$$

$$a + 4c = b + 4c$$

$$ab + 4bc + 4ca = 28$$

$$\text{suy ra } a = b = 2; c = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2 khi $a = b = 2; c = \frac{3}{2}$.