

CHUYÊN ĐỀ 8:

TAM GIÁC

ÔN HÈ MÔN: TOÁN - LỚP 7



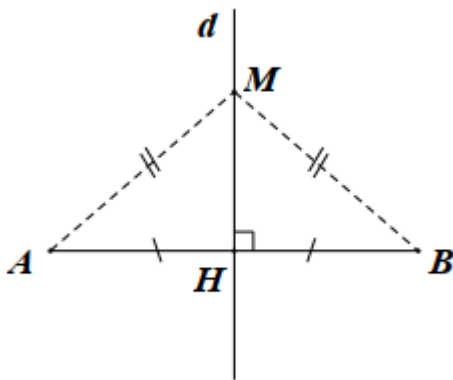
BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Dạng 5. Đường trung trực của một đoạn thẳng

A. Lý thuyết

* Định nghĩa:

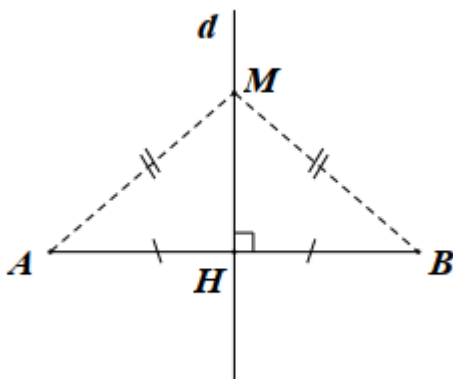
Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.



d là đường trung trực của đoạn AB .

Định lý 1: Điểm nằm trên trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

Định lý 2: Điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.



$MA = MB$ thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB .

* **Nhận xét:** Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

B. Bài tập

Bài 1: Điền vào chỗ trống sau: “Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại ... của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng đó”.

- A. trung trực. B. giao điểm. C. trọng tâm. D. trung điểm.

Bài 2: Cho đoạn thẳng AB, điểm I là trung điểm của AB. Điểm M nằm trên đường trung trực của AB. Khẳng định nào sau đây là sai:

- A. $MA = MB$. B. $MI \perp AB$. C. $\triangle AMI = \triangle IMB$. D. $MAB = MBA$.

Bài 3: Đường thẳng d là trung trực của đoạn thẳng MN khi

- A. d đi qua điểm I của MN. B. $d \perp MN$.
C. $d \perp MN$ tại I và $IM = IN$. D. $d // MN$ và $IM = IN$.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB < AC$. Tia phân giác của $\hat{B}$ cắt AC tại E. Từ E kẻ ED vuông góc với BC tại D. Kết luận nào sau đây đúng nhất?

- A. $\triangle ABE = \triangle DBE$. B. $\triangle BAD$ cân tại B.
C. BE là đường trung trực của đoạn thẳng AD. D. Cả A, B, C đều đúng.

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\angle CAB = 50^\circ$, đường trung trực của AB cắt BC tại D. Tính $\angle DAC$.

- A. 15° . B. 30° . C. 50° . D. 60° .

Bài 6: Cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Trên d lấy 2 điểm M, N sao cho $OM = ON$. Tứ giác AMBN là hình gì?

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\angle ACB = 30^\circ$. Đường trung trực của BC cắt AC tại M. Chứng minh BM là tia phân giác của góc ABC.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Các đường trung trực của BE, AC cắt nhau tại O.

- a) Chứng minh $\triangle AOB = \triangle COE$.
b) Chứng minh AO là tia phân giác của $\angle BAC$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ có $\angle BAC = 100^\circ$. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC lần lượt tại E và F. Tính $\angle EAF$.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, kẻ đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $AK = AH$. Kẻ $KD \perp AC$ ($D \in BC$). Chứng minh rằng:

- a) $\triangle AHD = \triangle AKD$.
b) AD là đường trung trực của đoạn thẳng HK.
c) AD là tia phân giác của $\angle HAK$.

-----Hết-----

Hướng dẫn giải chi tiết

Bài 1: Điền vào chỗ trống sau: “Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại ... của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng đó”.

- A. trung trực. B. giao điểm. C. trọng tâm. D. trung điểm.

Phương pháp

Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Lời giải

Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại **trung điểm** của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Đáp án: D

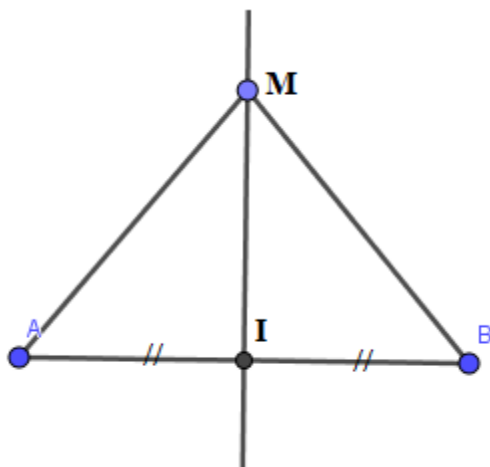
Bài 2: Cho đoạn thẳng AB, điểm I là trung điểm của AB. Điểm M nằm trên đường trung trực của AB. Khẳng định nào sau đây là sai:

- A. $MA = MB$. B. $MI \perp AB$. C. $\triangle AMI = \triangle IMB$. D. $\angle MAB = \angle MBA$.

Phương pháp

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều 2 mút của đoạn thẳng đó.

Lời giải



Vì M nằm trên đường trung trực của AB nên $MI \perp AB$ và $IA = IB$

Vì M nằm trên đường trung trực của AB nên $MA = MB$ (tính chất) nên A đúng

Do đó, tam giác MAB cân tại M

suy ra $\angle MAB = \angle MBA$ nên D đúng

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle BMI$, ta có:

$$MA = MB$$

MI chung

$$IA = IB$$

Suy ra $\triangle AMI = \triangle BMI$ (c.c.c) nên C sai

Đáp án: C

Bài 3: Đường thẳng d là trung trực của đoạn thẳng MN khi

A. d đi qua điểm I của MN .

B. $d \perp MN$.

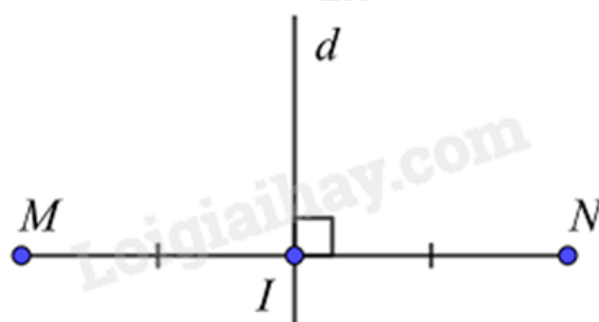
C. $d \perp MN$ tại I và $IM = IN$.

D. $d // MN$ và $IM = IN$.

Phương pháp

Đường thẳng vuông góc với 1 đoạn thẳng tại trung điểm của nó là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Lời giải



Đường thẳng d là trung trực của đoạn thẳng MN khi $d \perp MN$ tại I và $IM = IN$.

Đáp án: C

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$. Tia phân giác của $\hat{B}$ cắt AC tại E . Từ E kẻ ED vuông góc với BC tại D . Kết luận nào sau đây đúng nhất?

A. $\triangle ABE = \triangle DBE$.

B. $\triangle BAD$ cân tại B .

C. BE là đường trung trực của đoạn thẳng AD .

D. Cả A, B, C đều đúng.

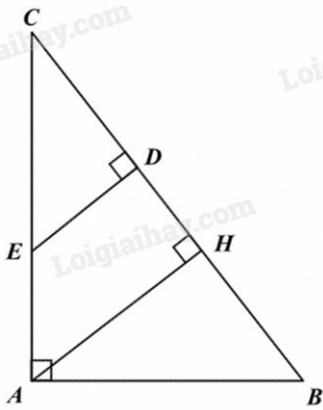
Phương pháp

- Sử dụng trường hợp cạnh huyền - góc nhọn để chứng minh hai tam giác bằng nhau.

- Từ hai tam giác bằng nhau suy ra hai điểm cách đều hai mút của đoạn thẳng đó nên là đường trung trực.

- Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân.

Lời giải



Xét $\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ có:

BE là cạnh chung.

$\angle ABE = \angle DBE$ (BE là phân giác của $\angle B$)

$\angle BAE = \angle BDE = 90^\circ$

Do đó $\triangle ABE = \triangle DBE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Vì vậy đáp án A đúng.

Ta có $\triangle ABE = \triangle DBE$ (chứng minh trên)

Suy ra $BA = BD$ và $AE = DE$ (các cặp cạnh tương ứng)

Vì vậy BE là đường trung trực của đoạn thẳng AD .

Do đó đáp án C đúng.

Vì $BA = BD$ nên $\triangle BAD$ cân tại B .

Vì vậy đáp án B đúng.

Vậy ta chọn đáp án D.

Đáp án: D

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\angle CAB = 50^\circ$, đường trung trực của AB cắt BC tại D . Tính $\angle DAC$.

A. 15° .

B. 30° .

C. 50° .

D. 60° .

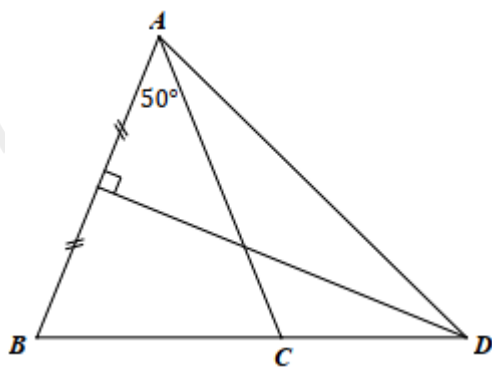
Phương pháp

Áp dụng tính chất tam giác cân để tính $\angle ABC$.

Sử dụng tính chất đường trung trực suy ra $\triangle ABD$ cân tại D , suy ra $\angle ABD = \angle BAD$, ta có $\angle BAD$.

Sử dụng trừ góc để tính góc $\angle CAD$.

Lời giải



Vì $\triangle ABC$ cân tại A (gt) nên $\angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ (tính chất tam giác cân)

Vì D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $AD = BD$ (tính chất đường trung trực), suy ra $\triangle ABD$ cân tại D.

Suy ra $\angle ABD = \angle BAD$ (tính chất tam giác cân).

Mà $\angle ABD = 65^\circ$ (cmt) nên $\angle BAD = 65^\circ$.

Mà $\angle CAB + \angle CAD = \angle BAD$

nên $50^\circ + \angle CAD = 65^\circ$

Suy ra $\angle CAD = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ$.

Đáp án: A

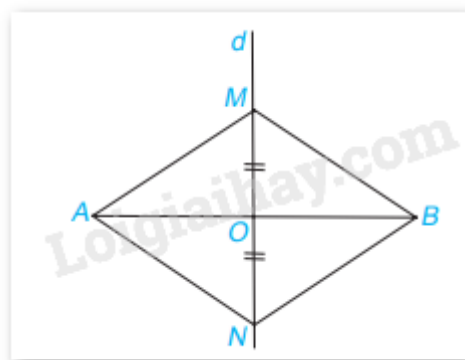
Bài 6: Cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Trên d lấy 2 điểm M, N sao cho $OM = ON$. Tứ giác AMBN là hình gì?

Phương pháp

Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng.

Áp dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác suy ra các cạnh bằng nhau.

Lời giải



Vì M nằm trên đường trung trực của AB nên $MA = MB$ (tính chất)

Vì N nằm trên đường trung trực của AB nên $NA = NB$ (tính chất)

Xét tam giác AOM và AON có:

$$OM = ON$$

$$\angle AOM = \angle AON (= 90^\circ)$$

AO chung

$$\text{Do đó } \triangle AOM = \triangle AON \text{ (c.g.c)}$$

nên $AM = AN$ (2 cạnh tương ứng)

$$\text{Mà } MA = MB; NA = NB$$

$$\text{Suy ra } MA = MB = NB = NA$$

Do đó tứ giác AMBN là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau)

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\angle ACB = 30^\circ$. Đường trung trực của BC cắt AC tại M. Chứng minh BM là tia phân giác của góc ABC.

Phương pháp

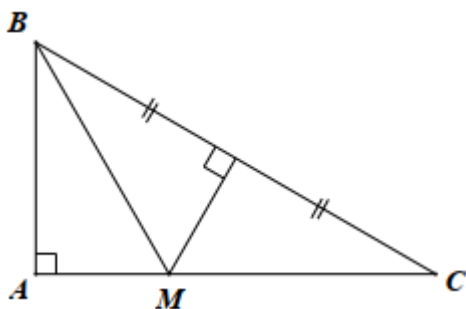
Sử dụng tính chất đường trung trực, chứng minh $\triangle BMC$ cân tại M.

Suy ra $\angle MBC$.

Áp dụng tính chất tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông bằng 90° , tính $\angle CBA$.

Chứng minh $\angle MBC = \frac{\angle CBA}{2}$ nên BM là tia phân giác của $\angle ABC$.

Lời giải



Vì M thuộc đường trung trực của BC nên $BM = CM$ (tính chất đường trung trực), suy ra $\triangle BMC$ cân tại M.

Do đó $\angle MBC = \angle BCM$ (tính chất tam giác cân).

Mà $\angle BCM = 30^\circ$ (gt) nên $\angle MBC = 30^\circ$ (1)

Xét $\triangle ABC$ có $\angle A = 90^\circ$ nên $\angle BCA + \angle CBA = 90^\circ$

$30^\circ + \angle CBA = 90^\circ$ nên $\angle CBA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle CBM = \frac{\angle CBA}{2}$ nên BM là tia phân giác của $\angle ABC$.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Các đường trung trực của BE , AC cắt nhau tại O .

a) Chứng minh $\triangle AOB = \triangle COE$.

b) Chứng minh AO là tia phân giác của BAC .

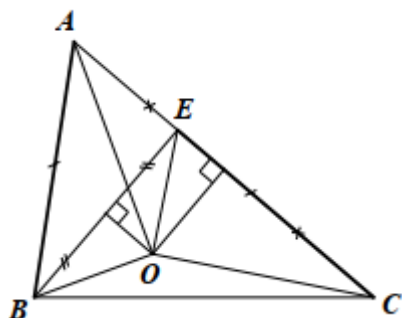
Phương pháp

a) Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng để suy ra các cạnh bằng nhau.

Chứng minh $\triangle AOB = \triangle COE$ theo trường hợp cạnh – cạnh – cạnh.

b) Chứng minh $BAO = ECO$ và $CAO = ECO$ nên $CAO = BAO$, suy ra AO là tia phân giác của BAC .

Lời giải



a) Ta có: O thuộc đường trung trực của BE (gt) nên $OB = OE$ (tính chất đường trung trực)

O thuộc đường trung trực của AC (gt) nên $OC = OA$ (tính chất đường trung trực).

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COE$ có:

$$AO = CO \text{ (cmt)}$$

$$OB = OE \text{ (cmt)}$$

$$AB = CE \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle AOB = \triangle COE$ (c.c.c).

b) Từ $\triangle AOB = \triangle COE$ (cmt) suy ra $BAO = ECO$ (hai góc tương ứng) (1)

Vì $OC = OA$ nên $\triangle AOC$ cân tại O , suy ra $CAO = ECO$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CAO = BAO (= ECO)$.

Do đó AO là tia phân giác của BAC .

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ có $BAC = 100^\circ$. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC lần lượt tại E và F . Tính EAF .

Phương pháp

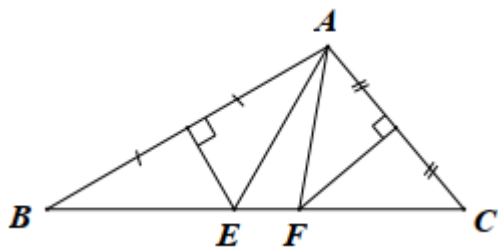
Sử dụng tính chất đường trung trực chứng minh $\triangle AEB$ cân tại E , do đó $EAB = EBA$ (tính chất tam giác cân)

Chứng minh tương tự, ta có $\triangle AFC$ cân tại F nên $FAC = FCA$ (tính chất tam giác cân)

Áp dụng định lý tổng ba góc trong tam giác bằng 180° vào tam giác ABC để tính $ABC + ACB$.

Kết hợp với $BAC = BAE + EAF + FAC$ để tính EAF .

Lời giải



Vì E thuộc đường trung trực của AB (gt) nên $AE = BE$ (tính chất đường trung trực)

Suy ra $\triangle AEB$ cân tại E, do đó $EAB = EBA$ (tính chất tam giác cân)

Chứng minh tương tự, ta có $\triangle AFC$ cân tại F nên $FAC = FCA$ (tính chất tam giác cân)

Xét $\triangle ABC$ có: $BAC + ABC + ACB = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác)

$$100^\circ + ABC + ACB = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } ABC + ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Mà $BAC = BAE + EAF + FAC$; $EAB = EBA$ (cmt) và $FAC = FCA$ (cmt)

$$\text{nên } EAF = 180^\circ - 2(ABC + ACB) = 180^\circ - 2.80^\circ = 20^\circ.$$

Vậy $EAF = 20^\circ$.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, kẻ đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $AK = AH$. Kẻ $KD \perp AC$ ($D \in BC$). Chứng minh rằng:

a) $\triangle AHD = \triangle AKD$.

b) AD là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

c) AD là tia phân giác của $\angle HAK$.

Phương pháp

a) Chứng minh $\triangle AHD = \triangle AKD$ theo trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông.

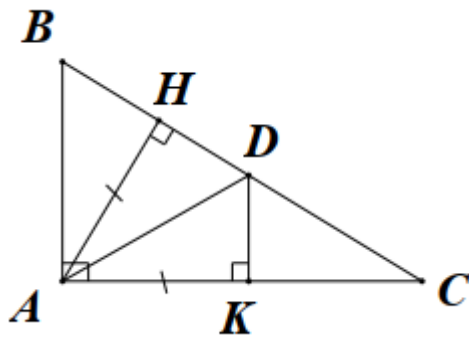
b) Chứng minh $HD = KD$ nên D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng HK.

Chứng minh $AH = AK$ nên A thuộc đường trung trực của đoạn thẳng HK.

Suy ra AH là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

c) Chứng minh $\angle HAD = \angle KAD$ nên AD là tia phân giác của $\angle HAK$.

Lời giải



a) Vì AH là đường cao của $\triangle ABC$ (gt) nên $AH \perp BC$, suy ra $AHB = AHC = 90^\circ$.

Vì $KD \perp AC$ ($D \in BC$) (gt) nên $AKD = DKC = 90^\circ$.

Xét $\triangle AHD$ ($H = 90^\circ$) và $\triangle AKD$ ($K = 90^\circ$) có:

$AH = AK$ (gt)

AD chung

nên $\triangle AHD = \triangle AKD$ (ch – cgv).

b) Vì $\triangle AHD = \triangle AKD$ (cmt) nên $HD = KD$ (hai cạnh tương ứng) nên D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng HK.

Mà $AH = AK$ nên A thuộc đường trung trực của đoạn thẳng HK.

Do đó AH là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

c) Vì $\triangle AHD = \triangle AKD$ (cmt) nên $HAD = KAD$ (hai góc tương ứng)

Do đó AD là tia phân giác của HAK .