

CHUYÊN ĐỀ 8:

TAM GIÁC

ÔN HÈ MÔN: TOÁN - LỚP 7



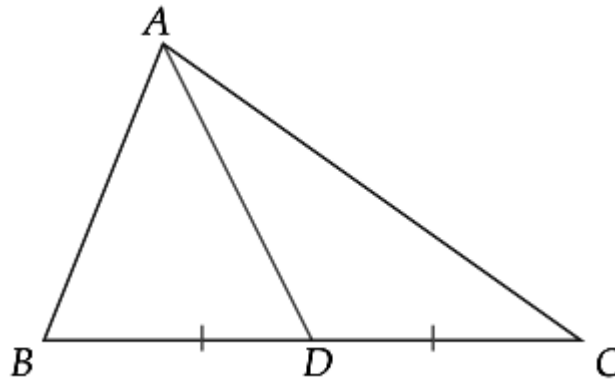
BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Dạng 6. Tính chất ba đường trung trực, trung tuyến, đường cao, phân giác của tam giác**A. Lý thuyết**

* Sự đồng quy của ba đường trung tuyến trong một tam giác

- Đường trung tuyến của tam giác

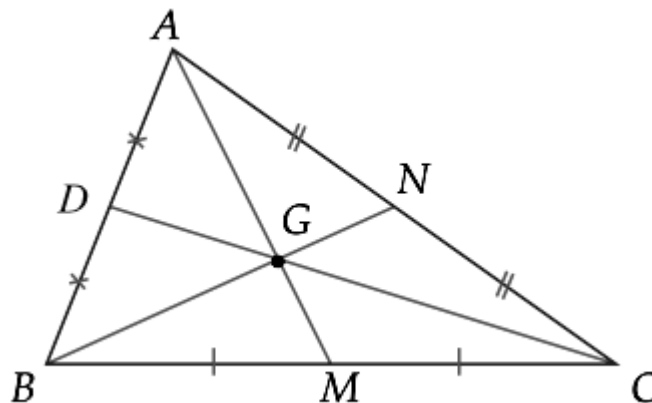
Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của tam giác ABC .



- **Định lý:** Ba đường trung tuyến của tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng qui tại một điểm). Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó:

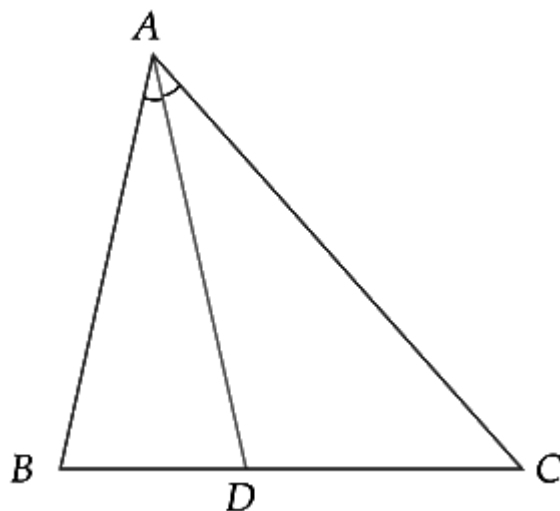
$$\frac{AG}{AM} = \frac{BG}{BN} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$$



* Sự đồng quy của ba đường phân giác trong một tam giác

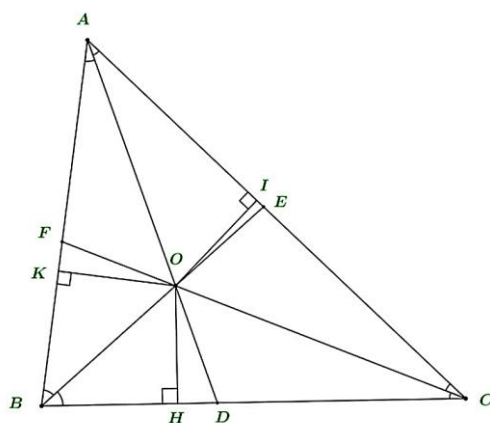
- Đường phân giác của tam giác

Trong tam giác ABC tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D thì đoạn thẳng AD được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC .



- **Định lí:** Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

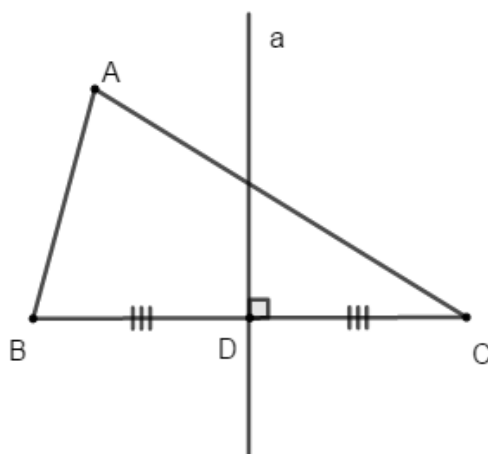
Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác AD , BE và CF . Ta có $OH = OI = OK$.



* **Sự đồng quy của ba đường trung trực**

- **Đường trung trực của tam giác**

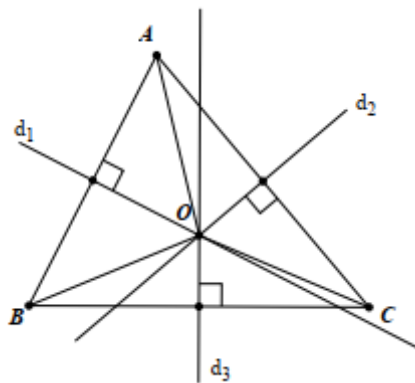
Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó



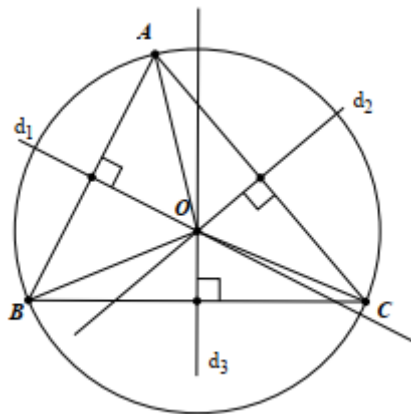
Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

- **Định lí:** Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Nhận xét: Giao điểm ba đường trung trực O của tam giác $\triangle ABC$ cách đều ba đỉnh của tam giác $OA = OB = OC$.



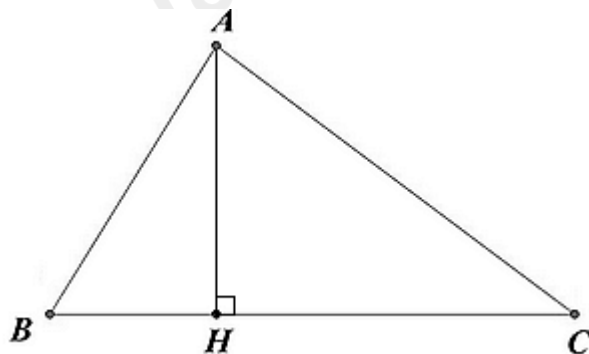
Vậy điểm O là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



*** Sự đồng quy của ba đường cao**

- Đường cao trong tam giác

Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.



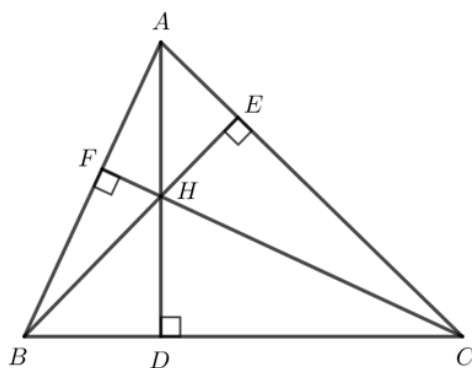
- Định lý: Ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm

Chú ý

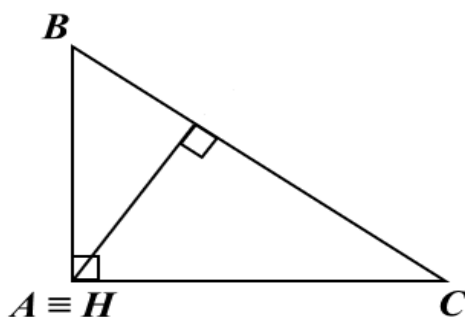
a) Điểm đồng quy ba đường cao của tam giác là trực tâm của tam giác

b) Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$ (hình vẽ) ta có:

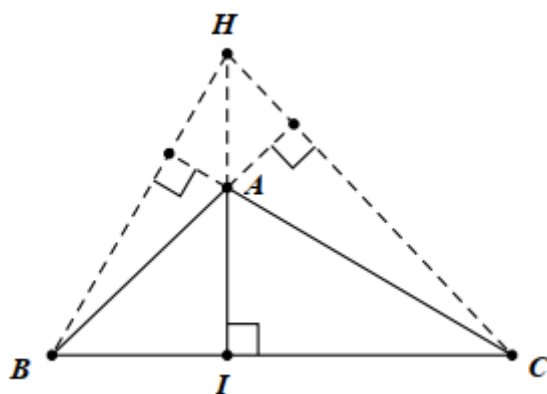
- Khi $\triangle ABC$ nhọn thì H nằm bên trong tam giác.



- Khi $\triangle ABC$ vuông tại A thì H trùng với A.



- Khi $\triangle ABC$ tù thì H nằm bên ngoài tam giác.



*** Lưu ý:**

- Trong tam giác cân, đường phân giác ở đỉnh đồng thời là đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực.
- Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung tuyến/đường cao/đường trung trực thì tam giác đó là tam giác cân.
- Trong tam giác đều, các đường phân giác, đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực của tam giác đó trùng nhau và cùng đồng quy tại một điểm.

B. Bài tập

Bài 1: Chọn câu sai.

- A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
- B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt nhau tại một điểm.
- C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
- D. Một tam giác có ba trọng tâm.

Bài 2: $\triangle ABC$ có trung tuyến $AM = 12cm$ và trọng tâm G . Độ dài đoạn AG là

- A. $4,5cm$.
- B. $3cm$.
- C. $6cm$.
- D. $8cm$.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có hai đường phân giác CD và BE cắt nhau tại I. Khi đó

- A. AI là trung tuyến vẽ từ A.
- B. AI là đường cao kẻ từ A.
- C. AI là trung trực cạnh BC.
- D. AI là phân giác của góc A.

Bài 4: Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực trong $\triangle ABC$. Khi đó O là:

- A. Điểm cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$. B. Điểm cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.
C. Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. D. Đáp án B và C đúng.

Bài 5: Nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực thì tam giác đó là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân. C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông cân.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $\hat{A} = 40^\circ$, đường trung trực của AB cắt BC ở D. Tính $\angle CAD$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 40° .

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn, hai đường cao BD và CE. Trên tia đối của tia BD lấy điểm I sao cho $BI = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$.

a) Chứng minh $AI = AK$.

b) $\triangle AIK$ là tam giác gì?

Bài 8: Cho G là trọng tâm của tam giác đều. Chứng minh rằng $GA = GB = GC$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$, các đường trung tuyến BD và CE. So sánh $BD + CE$ và $\frac{3}{2}BC$.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$, các tia phân giác của góc B và A cắt nhau tại điểm O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại M, cắt AC ở N. Cho $BM = 4cm, CN = 5cm$. Tính MN?

-----Hết-----

Hướng dẫn giải chi tiết

Bài 1: Chọn câu sai.

- A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
- B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt nhau tại một điểm.
- C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
- D. Một tam giác có ba trọng tâm.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về ba đường trung tuyến.

“ Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác đó.”

Lời giải

Một tam giác chỉ có một trọng tâm nên đáp án D sai.

Đáp án: D

Bài 2: $\triangle ABC$ có trung tuyến $AM = 12cm$ và trọng tâm G . Độ dài đoạn AG là

- A. $4,5cm$.
- B. $3cm$.
- C. $6cm$.
- D. $8cm$.

Phương pháp

Trọng tâm cách đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ đường trung tuyến kẻ từ đỉnh đó.

Lời giải

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ và AM là đường trung tuyến nên $AG = \frac{2}{3}AM$ (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

Do đó $AG = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8cm$.

Đáp án: D

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có hai đường phân giác CD và BE cắt nhau tại I . Khi đó

- A. AI là trung tuyến vẽ từ A .
- B. AI là đường cao kẻ từ A .
- C. AI là trung trực cạnh BC .
- D. AI là phân giác của góc A .

Phương pháp

Ba đường phân giác của tam giác cùng đi qua 1 điểm.

Lời giải

Hai đường phân giác CD và BE cắt nhau tại I mà ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên AI là phân giác của góc A .

Đáp án: D

Bài 4: Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực trong $\triangle ABC$. Khi đó O là:

- A. Điểm cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$.
- B. Điểm cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.
- C. Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- D. Đáp án B và C đúng.

Phương pháp

Tính chất đồng quy của 3 đường trung trực trong một tam giác.

Lời giải

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua 1 điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác và là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chọn đáp án D.

Đáp án: D

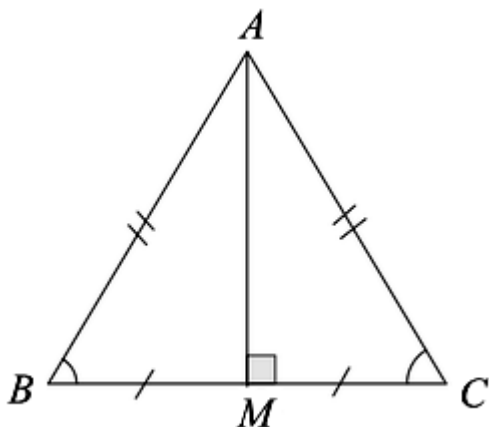
Bài 5: Nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực thì tam giác đó là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông.
- B. Tam giác cân.
- C. Tam giác đều.
- D. Tam giác vuông cân.

Phương pháp

Áp dụng tính chất đường trung trực và đường trung tuyến của tam giác.

Lời giải



Giả sử $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến đồng thời là đường trung trực.

Ta sẽ chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Thật vậy, vì AM là trung tuyến của $\triangle ABC$ (gt) nên $BM = MC$ (tính chất trung tuyến)

Vì AM là trung trực của BC nên $AM \perp BC$

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$BM = CM \text{ (cmt)}$$

AM chung

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM$ (2 cạnh góc vuông)

Suy ra $AB = AC$ (2 cạnh tương ứng) nên $\triangle ABC$ cân tại A.

Đáp án: B

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $\hat{A} = 40^\circ$, đường trung trực của AB cắt BC ở D. Tính $\angle CAD$.

A. 30° .

B. 45° .

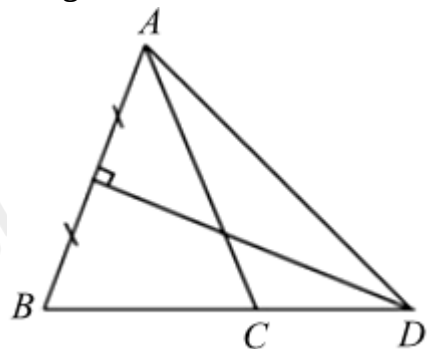
C. 60° .

D. 40° .

Phương pháp

Áp dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng, tính chất tam giác cân.

Lời giải



Vì $\triangle ABC$ cân tại A (gt) suy ra $\hat{B} = \hat{C} = (180^\circ - \hat{A}) : 2 = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Vì D thuộc đường trung trực của AB nên $AD = BD$ (tính chất đường trung trực của đoạn thẳng)
suy ra $\triangle ABD$ cân tại D (dấu hiệu nhận biết tam giác cân)

Do đó $\angle DAC + \angle CAB = \angle DAB = \hat{B} = 70^\circ$

Suy ra $\angle DAC = 70^\circ - \angle CAB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

Đáp án: A

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn, hai đường cao BD và CE. Trên tia đối của tia BD lấy điểm I sao cho $BI = AC$.

Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$.

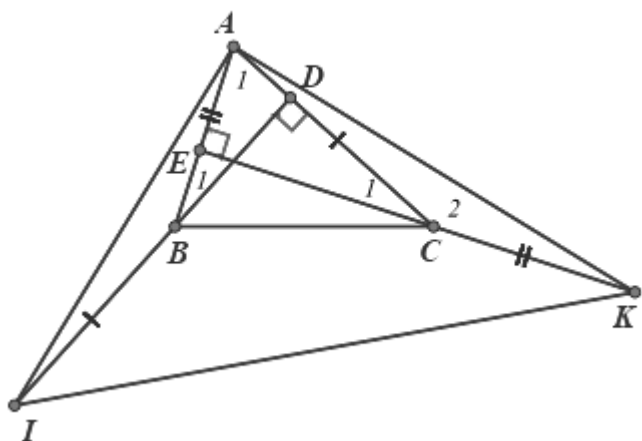
a) Chứng minh $AI = AK$.

b) $\triangle AIK$ là tam giác gì?

Phương pháp

Áp dụng tính chất trong tam giác vuông 2 góc nhọn phụ nhau, tính chất 2 góc kề bù, dấu hiệu nhận biết tam giác vuông cân.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ có: $A_1 + B_1 = 90^\circ$ (trong tam giác vuông 2 góc nhọn phụ nhau)

Xét $\triangle AEC$ có: $A_1 + C_1 = 90^\circ$ (trong tam giác vuông 2 góc nhọn phụ nhau)

suy ra $B_1 = C_1$ (1).

Lại có: $B_1 + B_2 = 180^\circ$ và $C_1 + C_2 = 180^\circ$ (2) (hai góc kề bù)

Từ (1); (2) suy ra $B_2 = C_2$.

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle KCA$ có:

$AB = CK$ (gt)

$B_2 = C_2$ (cmt)

$BI = AC$ (gt)

do đó $\triangle ABI = \triangle KCA$ (c - g - c) suy ra $AI = AK$ (2 cạnh tương ứng)

b) Ta có $AI = AK$ (cmt) suy ra $\triangle AIK$ cân tại A (*).

Vì $\triangle ABI = \triangle KCA$ (cmt) suy ra $\angle AIB = \angle CAK$ (3) (2 góc tương ứng)

Xét $\triangle AID$ có: $\angle AID + \angle IAD = 90^\circ$ (4) (trong tam giác vuông 2 góc nhọn phụ nhau)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle IAD + \angle CAK = 90^\circ$, do đó $\triangle AIK$ vuông tại A (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\triangle AIK$ vuông cân tại A.

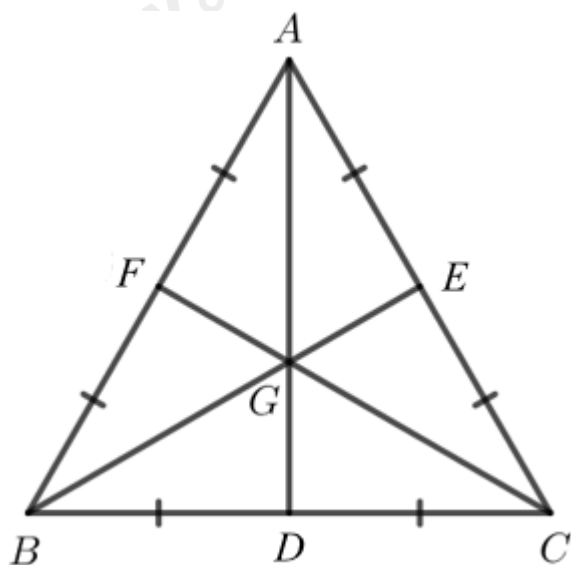
Bài 8: Cho G là trọng tâm của tam giác đều. Chứng minh rằng $GA = GB = GC$.

Phương pháp

- Xét các tam giác bằng nhau, suy ra các cạnh tương ứng bằng nhau.

- Áp dụng tính chất đường trung tuyến của tam giác.

Lời giải



Các tia AG, BG và CG cắt BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F thì D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB.

Mà $BC = AC = AB$ (do $\triangle ABC$ là tam giác đều), do đó $BD = DC = CE = EA = AF = FB$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ ta có: $AB = AC$; $\hat{A}$ chung; $AE = AF$.

Vậy $\triangle AEB = \triangle AFC (c.g.c)$, suy ra $BE = CF$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $\triangle BEC = \triangle ADC (c.g.c)$, suy ra $BE = AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AD = BE = CF$ (3)

Theo đề bài G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$GA = \frac{2}{3} AD; GB = \frac{2}{3} BE; GC = \frac{2}{3} CF$$

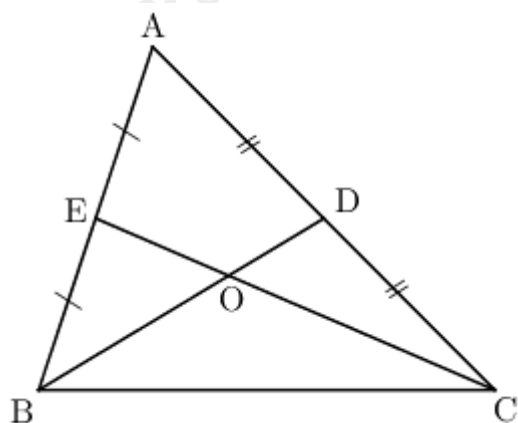
Vì thế từ (3) ta suy ra $GA = GB = GC$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$, các đường trung tuyến BD và CE. So sánh $BD + CE$ và $\frac{3}{2} BC$.

Phương pháp

- + Sử dụng tính chất đường trung tuyến của tam giác.
- + Sử dụng quan hệ giữa các cạnh trong tam giác.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của BD và CE. Trong $\triangle GBC$ ta có $BG + CG > BC$

Ta lại có $BG = \frac{2}{3} BD; CG = \frac{2}{3} CE$ (tính chất các đường trung tuyến của $\triangle ABC$)

Từ đó $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BG + CG$

suy ra $\frac{2}{3}(BD + CE) > BC$

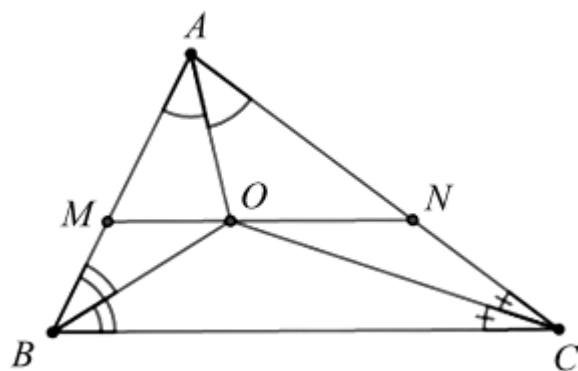
do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$, các tia phân giác của góc B và A cắt nhau tại điểm O . Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại M , cắt AC ở N . Cho $BM = 4cm, CN = 5cm$. Tính MN ?

Phương pháp

Áp dụng tính chất 3 đường phân giác của tam giác, tia phân giác của 1 góc, hai đường thẳng song song và tính chất tam giác cân.

Lời giải



Vì O là giao điểm của hai tia phân giác của các góc ABC và CAB (gt)

Suy ra CO là phân giác của ACB (tính chất 3 đường phân giác của tam giác)

Do đó $ACO = BCO$ (1) (tính chất tia phân giác của một góc)

Vì BO là phân giác của ABC (gt) nên $OBA = OBC$ (2) (tính chất tia phân giác của một góc)

Vì $MN \parallel BC$ (gt) nên $MOB = OBC$ (3) và $NOC = OCB$ (4) (so le trong)

Từ (1) và (4) suy ra $NOC = NCO$ suy ra $\triangle NOC$ cân tại N (dấu hiệu nhận biết tam giác cân)

Vì vậy $NO = NC = 5cm$ (tính chất tam giác cân)

Từ (2) và (3) suy ra $MOB = MBO$.

Do đó $\triangle MOB$ cân tại M (dấu hiệu nhận biết tam giác cân)

suy ra $MB = MO = 4cm$ (tính chất tam giác cân)

Vậy $MN = MO + ON = 4 + 5 = 9cm$.